

## Departamento de Física Aplicada III

Escuela Superior de Ingenieros  
Camino de los Descubrimientos s/n  
41092 Sevilla



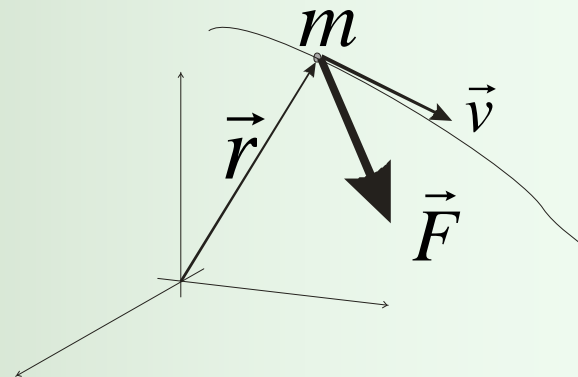
FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA  
PRIMER CURSO DE INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN  
CURSO 2009/2010

## FÍSICA CUÁNTICA

1. El estado de un sistema en Física Clásica.
2. Fallos de la Física Clásica (visto en clase).
3. El experimento de la doble rendija (visto en clase).
4. Repaso de vectores
5. Los Postulados de la Mecánica Cuántica
  - La función de onda.
  - Operadores.
  - Autovalores y autofunciones.
  - Probabilidades de los resultados.
  - El colapso.
  - Evolución temporal cuando no hay medidas.
6. El principio de incertidumbre.
7. Teorema de compatibilidad.
  - Aplicación: criptografía cuántica (comentado en clase).

## El estado de un sistema en Física Clásica

1. Partícula clásica: su estado queda determinado a partir de su posición y su cantidad de movimiento.
2. Ambas magnitudes tienen valores precisos, bien definidos en cada instante de tiempo.
3. Siempre es posible, al menos en principio, medir ambos valores sin perturbar apreciablemente el sistema.
4. Conociendo las fuerzas que actúan sobre la partícula, la aplicación de la 2ª ley de Newton permite determinar su estado en cualquier instante de tiempo, a partir de las condiciones iniciales.



$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

## Repaso de vectores



$\vec{v}$

### OPERACIONES BÁSICAS

#### 1) SUMA DE VECTORES

*Dados  $\vec{v}_1 \in E_3$  y  $\vec{v}_2 \in E_3$   
la SUMA  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in E_3$*

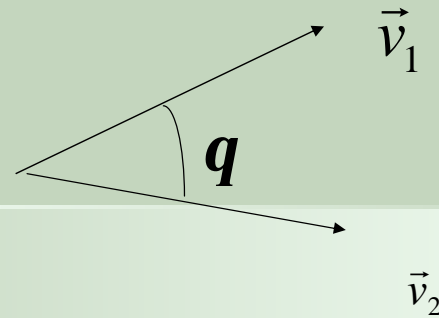
#### 2) MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

*Dado  $r \in R$ , y  $\vec{v} \in E_3$   
 $r\vec{v} \in E_3$*

#### • COMBINACIONES LINEALES

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 \in E_3$$

### 3) PRODUCTO ESCALAR



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos q$$

*propiedades:*

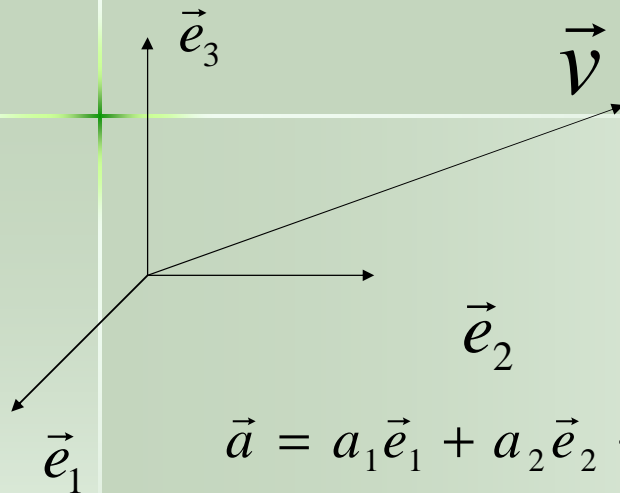
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \quad (\text{conmutativo})$$

$$\vec{v}_1 \cdot (r\vec{v}_2 + s\vec{v}_3) = r\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + s\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \quad (\text{linealidad})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 \geq 0$$

BASE ORTONORMAL

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \mathbf{d}_{ij}$$



¡ LAS COMPONENTES  
DEPENDEN DE LA BASE!

$$\vec{v} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3$$

siendo  $r_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i^2$$

## Los Postulados de la Mecánica Cuántica

- Postulado 1: La descripción del estado cuántico.
- Postulado 2: La descripción de las magnitudes físicas.
- Postulado 3: Resultados de las medidas.
- Postulado 4: La medida. El colapso de la función de onda.
- Postulado 5: Probabilidades de los resultados.
- Postulado 6: La evolución cuando no se producen medidas (ecuación de Schrödinger).

## Postulado 1: La descripción del estado cuántico

*El estado de un sistema cuántico  $S$  está representado por la función de onda.*

Para una partícula cuántica en el eje  $OX$ , la función de onda depende de  $x$  y del tiempo  $t$ . La función de onda es una función compleja de variable real.

$$\mathbf{y}(x, t) \in \mathbf{C}$$

$$x \in \mathbf{R}$$

## El espacio de las funciones de onda

- Las funciones de onda (estados) de un sistema tienen estructura de espacio vectorial, donde los escalares son números complejos (Espacios de Hilbert).
- La superposición de dos funciones de onda es otra función de onda.
- Una base del espacio es un conjunto de vectores (funciones de onda) a partir del cual se pueden expresar todas las funciones de onda del sistema.
- En este espacio, se define un producto escalar de vectores (funciones de onda):
$$f(x) \odot g(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx$$
$$f(x) \odot g(x) = (g(x) \odot f(x))^*$$
- La norma de una función se define como la raíz cuadrada del producto escalar de la función por sí misma:
$$\|f(x)\| \equiv \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}$$
$$f(x) \text{ normalizada} \Rightarrow \|f(x)\| = 1$$
- La función de onda que representa al estado del sistema debe estar normalizada (ver postulado 5).

## Operadores

$$\hat{O}f(x) = g(x)$$

Ejemplos:

$$\hat{O} = \hat{I} \text{ (identidad)}$$

$$\hat{I}f(x) = f(x)$$

$$\hat{O} = \hat{0} \text{ (operador nulo)}$$

$$\hat{0}f(x) = 0$$

$$\hat{O} = \frac{d}{dx}$$

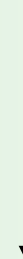
$$\hat{O}f(x) = f'(x)$$

Autovalores y autofunciones

$$\hat{A}f_i^A(x) = a_i f_i^A(x)$$



autofunción



autovalor

## Postulado 2: La descripción de las magnitudes físicas

*A cada magnitud física asociada al sistema le corresponde un operador.*

*Magnitud :  $A$   $\longrightarrow$  Operador :  $\hat{A}$*

Para una partícula en el eje OX:

$$x \rightarrow \hat{x}$$

$$\hat{x}\mathbf{y}(x) = x\mathbf{y}(x)$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x\mathbf{y}(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$$

$$E_c \rightarrow \hat{E}_c = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$E_p(x) \rightarrow \hat{E}_p = E_p(\hat{x})$$

$$E = E_c + E_p \rightarrow \hat{E} = \hat{E}_c + \hat{E}_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_p(\hat{x})$$

- El conjunto de funciones propias de cualquier operador que representa a una magnitud física del sistema constituye una base ortonormal.

$$f_i^A(x) \odot f_j^A(x) = \mathbf{d}_{ij}$$

- Por tanto, cualquier función de onda (estado) del sistema se puede expresar mediante combinación lineal (superposición) de los elementos de la base.

$$\mathbf{y}(x) = c_1 f_1^A(x) + c_2 f_2^A(x) + \dots = \sum c_i f_i^A(x)$$

- La condición de normalización implica que:

$$\|\mathbf{y}(x)\| = 1 \Rightarrow \int \mathbf{y}^*(x) \mathbf{y}(x) dx = 1 \Rightarrow \sum_i |c_i|^2 = 1$$

### Postulado 3: Los resultados de las medidas

*Cuando se mide una magnitud física de un sistema cuántico, los únicos valores que se pueden obtener son los valores propios del operador correspondiente a dicha magnitud.*

$$\hat{A}f_i^A(x) = a_i f_i^A(x) \quad ; \quad a_i \in R$$

Resultados posibles al medir:  $a_1, a_2, \dots, a_n$

Postulado 4: La medida. El colapso de la función de onda.

*Si sobre un sistema cuántico se mide una magnitud física, la función de onda inmediatamente después de la medida es la autofunción correspondiente al autovalor que se ha obtenido en la medida.*

## Postulado 5: Probabilidades de los resultados

*La probabilidad de obtener el valor propio  $a_i$  de la magnitud  $A$  es igual al cuadrado del módulo del producto escalar de la función propia correspondiente a dicho autovalor, por la función de onda que representa al estado del sistema.*

$$P(a_i) = | f_i^A(x) \odot \mathbf{y}(x) |^2$$

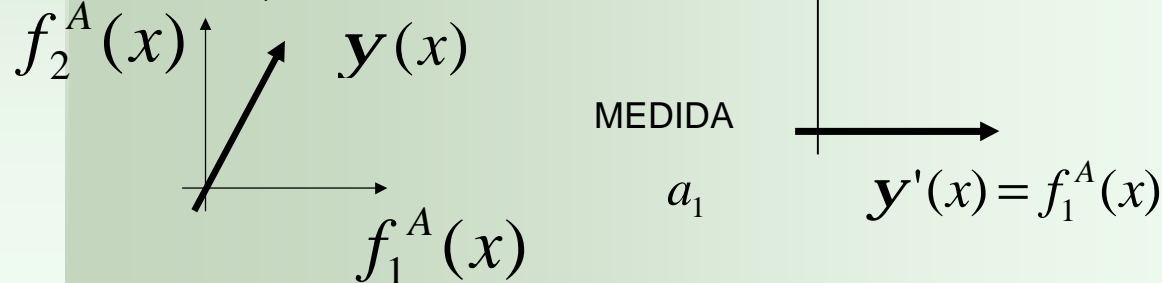
- EJEMPLO
- Estado en el instante t  $\mathbf{y}(x,t)$
- Magnitud  $A$
- Operador asociado  $\hat{A}$
- Autovalores y autovectores  $\hat{A} f_i^A(x) = a_i f_i^A(x)$  ,  $i = 1,2,\dots,n$

- Probabilidades:  $P(a_i) = |f_i^A(x) \odot \mathbf{y}(x)|^2$

- Si el estado está expresado en la base de autofunciones de la magnitud que se va a medir, las probabilidades de los distintos resultados son los módulos al cuadrado de los coeficientes del desarrollo.

$$\mathbf{y}(x) = c_1 f_1^A(x) + c_2 f_2^A(x) + \dots \Rightarrow \begin{aligned} P(a_i) &= |c_i|^2 \\ \sum_i P(a_i) &= \sum_i |c_i|^2 = 1 \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo gráfico del colapso para n=2. Este ejemplo tiene sólo un objetivo pedagógico, pero no se puede asociar un vector en un espacio real bidimensional, a un vector de un espacio de Hilbert bidimensional.



## Postulado 6: La evolución cuando no hay medidas

*La evolución temporal del vector de estado del sistema cuando no se producen medidas está dada por la ecuación de Schrödinger. Si el estado inicial se expresa en la base de la energía, entonces, la resolución de esta ecuación da lugar a:*

$$\mathbf{y}(x, t = 0) = \sum c_i f_i^E(x) \quad \rightarrow \quad \mathbf{y}(x, t) = \sum_j c_j e^{-i \frac{E_j t}{\hbar}} f_j^E(x)$$

*E es la energía del sistema*       $\hat{E} f_i^E(x) = E_i f_i^E(x)$

- En un sistema cuántico las probabilidades asociadas a los autovalores de la energía no dependen del tiempo.

$$p(E_n, t) = \left| c_n(0) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right|^2 = c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} c_n^* e^{+\frac{iE_n t}{\hbar}} = |c_n|^2 = p(E_n, t = 0)$$

Sistema S

Estado de S



Función de onda

Magnitud física "A" de S



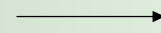
operador  $\hat{A}$

¿Qué podemos obtener al medir "A"?



Uno de los autovalores

¿Qué nos proporciona la función de onda?



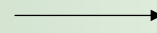
Las probabilidades de los autovalores

¿Cómo cambia el estado del sistema en la medida?



Colapsa a la función propia correspondiente al valor obtenido

¿Cómo evoluciona el estado cuando no se mide?



Ecuación de Schrödinger

## Valores medios

- Supongamos que realizamos un gran número de experimentos, donde se mide, siempre en el mismo estado cuántico, una magnitud.

$$\mathbf{y}(x) \quad M \text{ medidas} \quad A \rightarrow \hat{A}$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow N_1 \text{ veces,} \\ a_2 &\rightarrow N_2 \text{ veces,} \\ &\dots\dots\dots \\ a_i &\rightarrow N_i \text{ veces,} \end{aligned} \quad \sum_i N_i = M$$

### • PROBABILIDADES Y VALORES MEDIOS

Experimental  $p(a_i) = \frac{N_i}{M} \quad ; \quad \langle A \rangle = \sum_{i=1}^n a_i p(a_i) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{N_i}{M}$

Predicciones de la Mecánica Cuántica

Postulado 4  $\longrightarrow P(A = a_i) = |f_i^A(x) \odot \mathbf{y}(x)|^2 \quad \langle A \rangle = \sum_{i=1}^n a_i P(a_i)$

Si  $|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^n c_i f_i^A(x) \longrightarrow \langle A \rangle = \sum_{i=1}^n a_i |c_i|^2$

### Dispersión

Mide cuánto se desvía de la media el resultado de las distintas medidas.

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle + \langle A \rangle^2 - 2\langle A \rangle \langle A \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

Si el estado cuántico de un sistema es el vector propio correspondiente a cierta magnitud  $A$ , entonces se puede predecir con certeza el resultado de la medida de  $A$  sobre dicho estado. Este resultado será el del valor propio correspondiente a dicho vector propio.

En esta situación, la dispersión vale cero.

## El Principio de incertidumbre de Heisenberg

El conmutador de dos operadores se define como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Los operadores conmutan cuando satisfacen la relación:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

### RELACIÓN DE INCERTIDUMBRE

Magnitudes A y B

Operadores

$$\begin{array}{c} \hat{A} \\ \hat{B} \end{array}$$

Estado del sistema  $\mathbf{y}(x)$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\mathbf{y}}|}{2}$$

*El producto de las dispersiones asociadas a la medidas de dos magnitudes en un estado cuántico, es mayor o igual que el módulo del valor medio del conmutador de los operadores que las representan, dividido por 2.*

**Ejemplo:** Para una partícula cuántica en el eje OX, el conmutador de los operadores posición y cantidad de movimiento no es nulo. Por tanto, ambas magnitudes no pueden tomar valores definidos simultáneamente.

$$x \rightarrow \hat{x}$$

$$\hat{x}\mathbf{y}(x) = x\mathbf{y}(x)$$

$$p_x \rightarrow \hat{p}_x \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x\mathbf{y}(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}_x]f(x) &= \hat{x}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \hat{x}f(x) \\ &= \frac{\hbar}{i} xf'(x) - \frac{\hbar}{i} xf'(x) - \frac{\hbar}{i} f(x) = i\hbar f(x) \end{aligned}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

# Magnitudes compatibles e incompatibles

Magnitudes A y B

Operadores  $\hat{A}$   
 $\hat{B}$

## Magnitudes Compatibles

*Si se miden de forma consecutiva, y "simultáneamente", primero A, B después, y en tercer lugar A, el resultado de la primera medida coincide con el de la tercera.*

## Magnitudes Incompatibles

*Si se miden de forma consecutiva, y "simultáneamente", primero A, B después, y en tercer lugar A, el resultado de la primera medida no coincide con el de la tercera.*

## Teorema de compatibilidad

■ **Las siguientes afirmaciones son equivalentes:**

1. A y B son compatibles.
2. Los operadores asociados a dichas magnitudes conmutan.
3. Sus operadores poseen una base común de vectores propios.

**Para Magnitudes Incompatibles:**

1. A y B son **in**compatibles
2. Los operadores asociados a dichas magnitudes **no** conmutan.
3. Sus operadores **no** poseen una base común de vectores propios.

## MAGNITUDES COMPATIBLES

Magnitudes A y B  $\hat{A}f_1^A(x) = a_1f_1^A(x)$

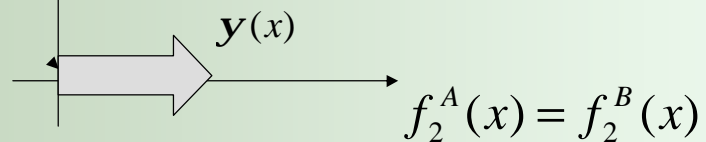
Operadores  $\hat{A}$   $\hat{A}f_2^A(x) = a_2f_2^A(x)$

$\hat{B}$   $\hat{B}f_1^B(x) = b_1f_1^B(x)$

$\hat{B}f_2^B(x) = b_2f_2^B(x)$

$$f_1^A(x) = f_1^B(x)$$

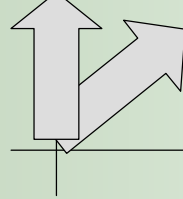
$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \longrightarrow$$



*Si el valor de la magnitud A se puede predecir con certeza, también se puede predecir con certeza el valor de la magnitud B.*

$$f_1^A(x) = f_1^B(x)$$

$y'(x)$



2) Se mide B: se obtiene con certeza el valor  $b_1$

3) Se mide A: se obtiene con certeza el valor  $a_1$

1) Se mide A: hay probabilidad no nula de obtener  $a_1$  y de obtener  $a_2$ . Supongamos que se obtiene  $a_1$

$y(x)$

$$f_2^A(x) = f_2^B(x)$$

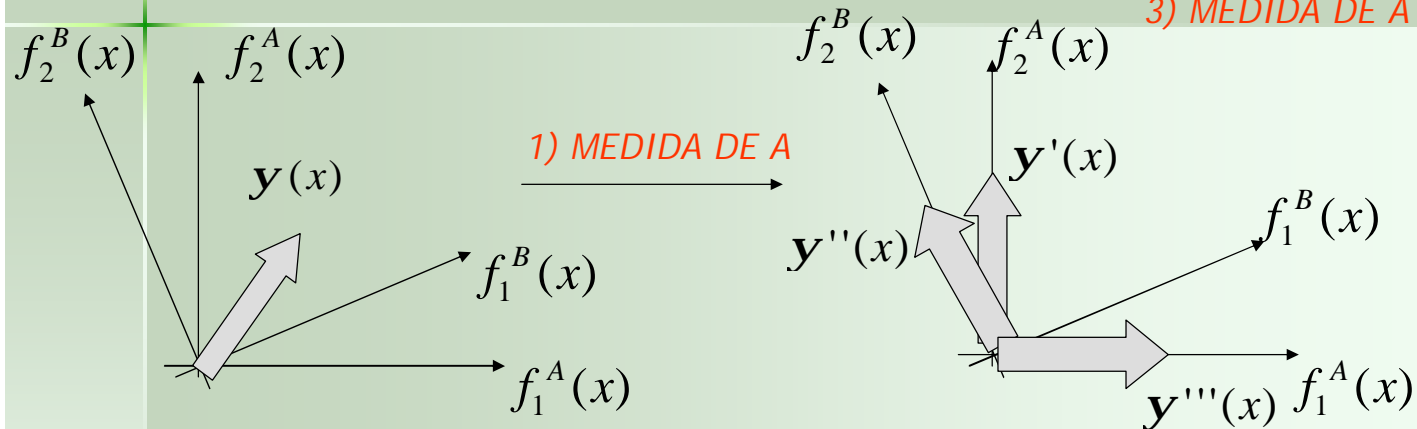
*Si se miden de forma consecutiva, y "simultáneamente", primero A, B después, y en tercer lugar A, el resultado de la primera medida coincidirá con el de la tercera. En este caso, la segunda medida no modifica el estado que se produce tras la primera medida.*

## MAGNITUDES INCOMPATIBLES

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

2) MEDIDA DE B

3) MEDIDA DE A



*Si se miden de forma consecutiva, y "simultáneamente", primero A, B después, y en tercer lugar A, el resultado de la tercera medida, en general, **no** coincidirá con el de la primera. En este caso, la segunda medida destruye el estado que se produce en la primera medida.*

## Aplicaciones

- En Física Clásica es posible, en principio, espiar un sistema de distribución de clave sin que se enteren emisor y receptor.
- Distribución de clave cuántica: el postulado del colapso permite detectar si un espía ha intervenido.
- El Teorema de Compatibilidad ha tenido aplicaciones recientes en protocolos de Criptografía Cuántica (ej. Protocolo BB84).
- El uso de medidas incompatibles permite generar una secuencia secreta de bits entre dos partes.
- Mediante el uso adicional de canales de comunicación clásicos, es posible detectar la presencia de un espía y, en este caso, abortar el proceso de distribución cuántica de clave.
- Si no ha habido espionaje, la clave generada entre emisor y receptor es secreta con seguridad.