

Estabilidad entrada-estado (ISS)

Análisis de sistemas no lineales

Francisco Gordillo

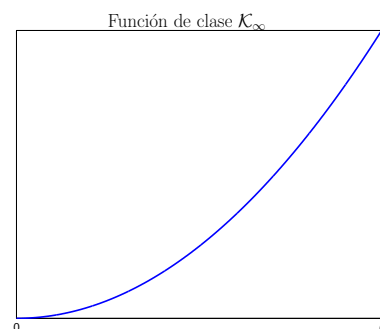
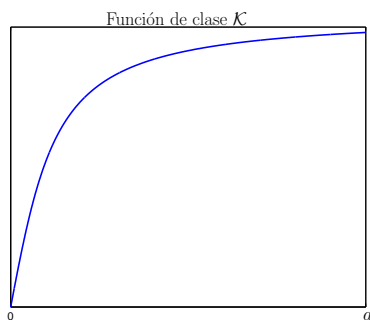
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Sevilla

Índice

- 1 Nuevas definiciones
- 2 Versión moderna del teorema de Liapunov
- 3 Estabilidad entrada-estado
- 4 Ejemplo de aplicación

Nuevas definiciones (I)

- *Función de clase \mathcal{K}* : Una función continua $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K} si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$.
- *Función de clase \mathcal{K}_∞* : Una función continua $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{K}_∞ si es estrictamente creciente, $\alpha(0) = 0$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$.



Nuevas definiciones (II)

- *Función de clase \mathcal{KL}* : Una función continua $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es de clase \mathcal{KL} si por cada s fijo la función

$$\begin{aligned} \alpha : [0, a) &\rightarrow [0, \infty) \\ r &\mapsto \beta(r, s) \end{aligned}$$

es de clase \mathcal{K} y, además por cada r fijo la función

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ s &\mapsto \beta(r, s) \end{aligned}$$

es decreciente y $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) = 0$.

Ejemplo

$$\beta(r, s) = re^{-as}$$

Algunas propiedades

- La composición de funciones de clase \mathcal{K} (clase \mathcal{K}_∞) $\alpha_1(\alpha_2(\cdot)) = \alpha_1 \circ \alpha_2(\cdot)$ es de clase \mathcal{K} (clase \mathcal{K}_∞).
- Si $\alpha(\cdot)$ es de clase \mathcal{K} definida en $[0, a)$ y $b = \lim_{r \rightarrow a} \alpha(r)$, existe una única función $\alpha^{-1} : [0, b) \rightarrow [0, a)$ tal que

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(\alpha(r)) &= r, & \forall r \in [0, a) \\ \alpha(\alpha^{-1}(r)) &= r, & \forall r \in [0, b)\end{aligned}$$

Además $\alpha^{-1}(\cdot)$ es de clase \mathcal{K} .

- Si $\alpha(\cdot)$ es de clase \mathcal{K}_∞ , entonces $\alpha^{-1}(\cdot)$ es de clase \mathcal{K}_∞ .
- Si $\beta(\cdot, \cdot)$ es de clase \mathcal{KL} y $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)$ son de clase \mathcal{K} , entonces la función

$$\begin{aligned}\gamma : [0, a) \times [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ (r, s) &\mapsto \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))\end{aligned}$$

es de clase \mathcal{KL} .

Versión moderna del teorema de Liapunov (I)

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

Teorema

Sea $V : B_d \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que, para ciertas funciones de clase \mathcal{K} , $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)$ definidas en $[0, d)$,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

- Si

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad \forall \|x\| < d,$$

el equilibrio $x = 0$ es estable.

Versión moderna del teorema de Liapunov (II)

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

Teorema

Sea $V : B_d \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que, para ciertas funciones de clase \mathcal{K} , $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)$ definidas en $[0, d)$,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

- Si, para una función de clase \mathcal{K} $\alpha_3(\cdot)$, definida en $[0, d)$,

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad \forall \|x\| < d,$$

el equilibrio $x = 0$ es local asintóticamente estable.

- Si $d = \infty$ y α_1, α_2 son de clase \mathcal{K}_∞ , el equilibrio $x = 0$ es GAS.

Estabilidad entrada-estado (ISS)

Dado el sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$. Supongamos que $\dot{x} = f(t, x, 0)$ tiene un equilibrio GAS en $x = 0$.

Pregunta

¿Qué podemos decir sobre el comportamiento del sistema cuando u es acotada?

En sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Como $\|e^{At}\| \leq ke^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq ke^{-\lambda t}\|x(0)\| + \int_0^t ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau \\ &\leq \underbrace{ke^{-\lambda t}\|x(0)\|}_{\text{clase } \kappa\mathcal{L}} + \underbrace{\frac{k\|B\|}{\lambda} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|}_{\text{clase } \kappa} \end{aligned}$$

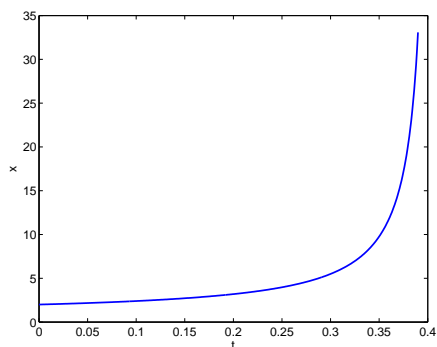
En sistemas no lineales (no es tan sencillo)

$$\dot{x} = -3x + (1 + 2x^2)u$$

- Para $u = 0$ el equilibrio $x = 0$ es GAS.
- Para $x(0) = 2, u = 1$ (por ejemplo)

$$x(t) = \frac{3 - e^t}{3 - 2e^t},$$

no es acotada (incluso tiene tiempo de escape finito).



Estabilidad entrada-estado

Definición

El sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ es estable entrada-estado si existe una función β de clase \mathcal{KL} y una función γ de clase \mathcal{K} tales que, para cualquier condición inicial $x(0)$ y cualquier entrada acotada $u(t)$,

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right)$$

- Para $u = 0$, $x = 0$ es GAS.
- Para cualquier entrada acotada el estado está acotado.
- Si el tiempo es suficientemente alto la cota depende del $\sup \|u\|$.
- Si $u(t) \rightarrow 0$, entonces $x(t) \rightarrow 0$.
- Existe una versión local.

Garantía de tipo Liapunov para ISS

Teorema

Sea $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un función de clase C^1 tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0$$

$\forall(t, x, u)$, donde α_1, α_2 son de clase \mathcal{K}_∞ , ρ es de clase \mathcal{K} y $W_3(x)$ es continua y definida positiva.

Entonces el sistema $\dot{x} = f(t, x, u)$ es estable entrada-estado con $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

Estabilidad entrada-estado

Ejemplo 1

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

- GAS para $u = 0$.
- $V = x^2/2$.

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1-\theta)x^4 - \theta x^4 + xu \leq -(1-\theta)x^4, \quad \forall |x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3}.$$

$$|x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3} \Rightarrow |xu| \leq \theta |x|^4$$

Donde $0 < \theta < 1$.

- Entonces el sistema es ISS.
- $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2/2 \Rightarrow \gamma(r) = \rho(r) = (r/\theta)^{1/3}$.

Estabilidad entrada-estado

Ejemplo 2

$$\dot{x} = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2$$

- GAS para $u = 0$.
- $V = x^2/2$.

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1 + x^2)u^2 \leq -x^4, \quad \forall |x| \geq u^2$$

- Entonces el sistema es ISS.
- $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^2/2 \Rightarrow \gamma(r) = \rho(r) = r^2$.

Estabilidad entrada-estado

Ejemplo 3 (I)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u\end{aligned}$$

- Para $u = 0$, con $V = x_1^2/2 + ax_2^4/4$, $a > 0$

$$\dot{V} = -x_1^2 + x_1x_2^2 - ax_2^4 = -\left(x_1 - \frac{x_2^2}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{4}\right)x_2^4.$$

Con $a > 1/4$ se demuestra que $x = 0$ es GAS.

Estabilidad entrada-estado

Ejemplo 3 (II)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u\end{aligned}$$

- Con $u \neq 0$ y tomando $a = 1$

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2^2)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + x_2^3u \leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3|u|$$

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}(1 - \theta)(x_1^2 + x_2^4) - \frac{1}{2}\theta(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3|u|, \quad 0 < \theta < 1.$$

El término $-\frac{1}{2}\theta(x_1^2 + x_2^4) + |x_2|^3|u|$ será menor igual que cero si

$$|x_2| \geq 2\frac{|u|}{\theta} \quad \text{ó} \quad \left(|x_2| \leq 2\frac{|u|}{\theta} \text{ y } |x_1| \geq 4\frac{|u|^2}{\theta^2} \right)$$

Estabilidad entrada-estado

Ejemplo 3 (III)

$$|x_2| \geq 2 \frac{|u|}{\theta} \text{ ó } \left(|x_2| \leq 2 \frac{|u|}{\theta} \text{ y } |x_1| \geq 4 \frac{|u|^2}{\theta^2} \right)$$

Esto se garantiza si

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \geq \max\left\{\frac{2|u|}{\theta}, \frac{4|u|^2}{\theta^2}\right\}$$

Definiendo

$$\rho(r) = \max\left\{\frac{2r}{\theta}, \frac{4r^2}{\theta^2}\right\}$$

Se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}(1-\theta)(x_1^2 + x_2^4), \quad \forall \|x\|_\infty \geq \rho(|u|)$$

Se tiene que el sistema es ISS.

Sin embargo, el cálculo de γ es más complicado por ser la dimensión del sistema mayor que 1.

Ejemplo de aplicación

- Sea el sistema en cascada

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2)\end{aligned}$$

Con $f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ y $f_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$

- Los sistemas $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, 0)$ y $\dot{x}_2 = f_2(t, x_2)$ tienen en el origen un equilibrio GAS.

Pregunta

¿Bajo qué condiciones el origen del sistema completo será GAS?

Ejemplo de aplicación

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \quad (2)$$

Teorema

Si el sistema (1) considerando x_2 como su entrada, es ISS y el origen de (2) es GAS, entonces el origen del sistema completo es GAS.

Idea de la prueba

Ya hemos mencionado que en los sistemas ISS $x \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 0$.