

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 4 de Julio de 2002

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Se considera el recinto plano

$$R := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{x^3}{3} \right\}.$$

Obtener los volúmenes de los sólidos de revolución V_1 , obtenido al girar dicho recinto R alrededor del eje OX , y V_2 , obtenido al girar R alrededor de la recta $x = a$, con $a > 3$.

Solución.

Usando el *método de los discos*, el volumen V_1 es

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{x^6}{9} dx \\ &= \pi \left[\frac{x^7}{9 \cdot 7} \right]_0^3 = \pi \frac{3^7}{7} = \frac{243}{7} \pi. \end{aligned}$$

Usando el *método de las capas*, el volumen V_2 es

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^3 (a - x) \frac{x^3}{3} dx \\ &= 2\pi \left[\frac{ax^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 3} \right]_0^3 \\ &= 2\pi \left(\frac{a3^4}{4 \cdot 3} - \frac{3^5}{5 \cdot 3} \right) \\ &= 2\pi 3^3 \left(\frac{a}{4} - \frac{3}{5} \right) \\ &= 2\pi 3^3 \left(\frac{5a - 12}{20} \right) \\ &= \frac{27(5a - 12)}{10} \pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Calcular la integral

$$\int_b^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

para los valores de a y b , con $a+b > 0$, que la hagan convergente.

Solución.

En $x = -a$ y $x = b$, el integrando no está definido. Sabemos que $b > -a$, luego $-a \notin [b, \infty)$ por lo que la integral no es impropia en $x = -a$.

En primer lugar, consideramos las integrales impropias

$$I_1 = \int_b^{b+1} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}, \quad I_2 = \int_{b+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}.$$

Para analizar la convergencia de I_1 , calculamos

$$\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}}{\frac{1}{(x-b)^p}} = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x-b)^p}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{1}{a+b} > 0,$$

si $p = 1/2$. Entonces, I_1 es convergente porque la integral

$$\int_b^{b+1} \frac{dx}{\sqrt{x-b}}$$

es convergente.

Para analizar la convergencia de I_2 , calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(x+a)\sqrt{x-b}}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{(x+a)\sqrt{x-b}} = 1,$$

si $p = 3/2 > 1$. En consecuencia, I_2 es convergente y la integral $I_1 + I_2$ converge para todos los valores de a y b , tales que $a+b > 0$.

Para calcular la integral, usamos el cambio de variable $x - b = t^2$, con $t > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_b^k \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{2t}{(a+b+t^2)t} dt. \end{aligned}$$

Dado que $a + b > 0$, elegimos c tal que $a + b = c^2$ y calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{2 dt}{(a+b+t^2)} &= \frac{2}{c} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{k-b}} \frac{1/c}{1 + \left(\frac{t}{c}\right)^2} dt \\ &= \frac{2}{c} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\arctan \left(\frac{t}{c} \right) \right]_0^{\sqrt{k-b}} \\ &= \frac{2}{c} \lim_{k \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{\sqrt{k-b}}{c} \right) \\ &= \frac{2}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

Obtener su intervalo de convergencia, analizando el comportamiento en los extremos. Calcular su función suma en el interior de dicho dominio.

Indicación: Para determinar la suma, descomponer en fracciones simples el coeficiente del término general.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = 1.$$

En el extremo $x = 1$, la serie tiene el mismo carácter que la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Entonces, la serie en el extremo $x = -1$ converge absolutamente y el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.

Para calcular la suma de la serie en los puntos $|x| < 1$, descomponemos

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \implies 1 = (A+B)n + 2A \implies A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \right).$$

Sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si $x \in [0, 1)$ entonces integrando en el intervalo $[0, x]$, obtenemos

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

Si $x \in (-1, 0]$ entonces integrando en el intervalo $[x, 0]$, obtenemos

$$\int_x^0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_x^0 \frac{1}{1-t} dt = \int_0^{-x} \frac{1}{1+u} du = \ln(1-x).$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1, 1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Sea $x \in (-1, 1)$ tal que $x \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, la suma de la serie, para $x \in (-1, 1)$ tales que $x \neq 0$, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} - \ln(1-x) \right).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 4 de Julio de 2002

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4. Se considera la ecuación de ondas $w_{tt} = c^2 w_{xx}$, donde c es una constante real y la función incógnita es $w = w(x, t)$. Transformarla mediante el cambio de variables $u = x + ct$, $v = x - ct$. Integrar la ecuación que resulta para $w(u, v)$ y probar que

$$w(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

Solución. Usando la regla de la cadena para derivar, obtenemos

$$\begin{aligned}w_t &= cw_u - cw_v, \\w_x &= w_u + w_v.\end{aligned}$$

Derivando de nuevo las anteriores ecuaciones

$$\begin{aligned}w_{tt} &= c^2 (w_{uu} - 2w_{uv} + w_{vv}), \\w_{xx} &= w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}.\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de ondas $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ se transforma en

$$c^2 (w_{uu} - 2w_{uv} + w_{vv}) = c^2 (w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}),$$

que equivale a $4w_{uv} = 0$. Por tanto, la ecuación transformada es

$$w_{uv}(u, v) = 0.$$

Integrando respecto a v , obtenemos $w_u = F(u)$. Integrando esta última ecuación respecto a u , se tiene $w(u, v) = f(u) + g(v)$, donde $f'(u) = F(u)$. En consecuencia, queda probado que

$$w(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Ejercicio 5. Obtener los extremos absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el recinto

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Solución. Para obtener los puntos críticos del interior de R , resolvemos el sistema $\nabla f(x, y) = (y, x) = (0, 0)$, obteniendo el punto $P_1 = (0, 0)$. La matriz hessiana es

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el punto P_1 es un punto de silla porque $\det H = -1 < 0$.

La frontera de R se define con la restricción $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, resolviendo

$$\begin{cases} y = 8\lambda x, \\ x = 2\lambda y, \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda por y , obtenemos

$$8\lambda x^2 = 2\lambda y^2 \iff \lambda(4x^2 - y^2) = 0.$$

Entonces $\lambda = 0$, o bien $4x^2 = y^2$. Si $\lambda = 0$ tenemos que $x = y = 0$ no satisface la tercera ecuación, por lo que $4x^2 = y^2$. Sustituyendo en la tercera ecuación, $2y^2 = 4$, luego $y = \pm\sqrt{2}$. Por tanto $4x^2 = 2$, lo que implica que $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Así, hemos obtenido en la frontera de R los puntos

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), \\ P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), P_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_2) = f(P_5) = 1, \quad f(P_3) = f(P_4) = -1.$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en P_2 y P_5 , mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_3 y P_4 .

Ejercicio 6. Sea S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Sea F el campo vectorial $F(x, y, z) = (xy, 0, -z^2)$. Hallar

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS,$$

donde n representa el vector normal exterior al cubo.

Solución. Sea T la cara inferior del cubo $V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de un campo a través de $S \cup T$ coincide con la integral triple de la divergencia del campo*, es decir

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) \, dx \, dy \, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$. Entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = - \iint_T \operatorname{rot} F \cdot n \, dS.$$

A continuación, calculamos el rotacional del campo F ,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy & 0 & -z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, -x).$$

Una parametrización de T es

$$T(x, y) = (x, y, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

y el correspondiente vector normal exterior a T es $n = (0, 0, -1)^T$. Entonces

$$\iint_T \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \, dy = \frac{1}{2},$$

lo que implica que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = -\frac{1}{2}.$$