

# CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación  
Primer Examen Parcial. 4 de Febrero de 2002

**Ejercicio 1.** Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}.$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de dicha función.
2. Determinar sus extremos absolutos.
3. Calcular la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  si es convergente.

---

**Solución.** 1. La función  $f$  es

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1} & \text{si } x < 0, \\ xe^{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ xe^{1-x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-xe^{x-1}) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^{x-1} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x). \end{aligned}$$

Entonces,  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ . La función derivada  $f'$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  es

$$f'(x) = \begin{cases} -(1+x)e^{x-1} & \text{si } x < 0, \\ (1+x)e^{x-1} & \text{si } 0 < x < 1, \\ (1-x)e^{1-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$ , calculamos las respectivas derivadas laterales

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-he^{h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-e^{h-1}) = -\frac{1}{e}, \\ f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^{h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{h-1} = \frac{1}{e}, \\ f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)e^h + e^h}{1} = 2, \\ f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)e^{-h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1+h)e^{-h} + e^{-h}}{1} = 0. \end{aligned}$$

Como  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$  y  $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ , la función  $f$  no es derivable en  $\{0, 1\}$ .

2. Los puntos críticos de  $f$  son 0, 1 y los puntos tales que  $f'(x) = 0$ . Si  $x < 0$  entonces  $f'(x) = -(1+x)e^{x-1} = 0$  implica  $x = -1 < 0$ . Si  $x \in (0, 1)$  entonces  $f'(x) = (1+x)e^{x-1} = 0$  implica que  $x = -1$  que no pertenece al intervalo  $(0, 1)$ . Si  $x > 1$  entonces  $f'(x) = (1-x)e^{1-x} = 0$  implica que  $x = 1$  que no pertenece al

intervalo  $(1, \infty)$ . Por tanto, el único punto con derivada nula es  $x = -1$ . Los valores de la función en los tres puntos críticos son  $f(-1) = \frac{1}{e^2}$ ,  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ . Entonces,  $f$  alcanza su mínimo en  $x = 0$  y su máximo en  $x = 1$ .

3. Calculamos la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 (-xe^{x-1}) dx + \int_0^1 xe^{x-1} dx + \int_1^{\infty} xe^{1-x} dx.$$

Integrando por partes, calculamos las primitivas

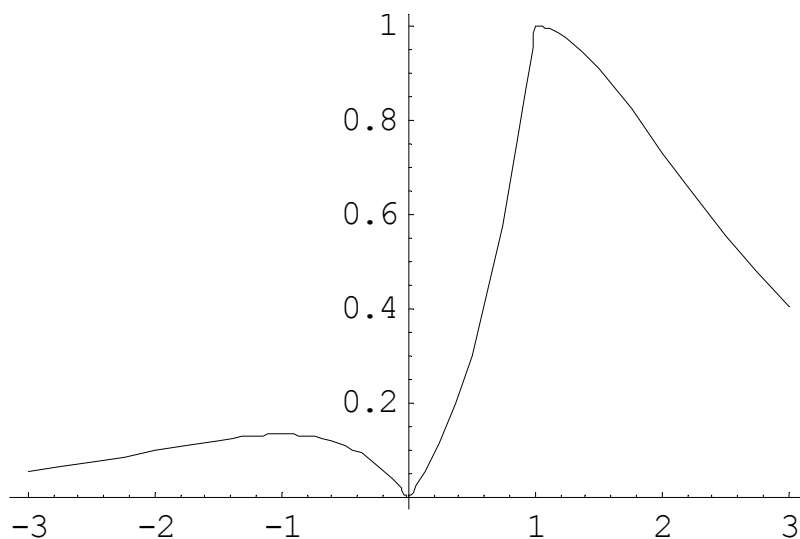
$$\begin{aligned} \int (-xe^{x-1}) dx &= -xe^{x-1} + e^{x-1} + C = e^{x-1}(1-x) + C, \\ \int xe^{1-x} dx &= -xe^{1-x} - e^{1-x} + C = -e^{1-x}(1+x) + C. \end{aligned}$$

Usando el teorema Fundamental de Cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (-xe^{x-1}) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^{x-1}(1-x)]_a^0 = \frac{1}{e} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1-a}{e^{1-a}} = \frac{1}{e} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{1-a}} = \frac{1}{e}, \\ \int_0^1 xe^{x-1} dx &= [e^{x-1}(x-1)]_0^1 = -\left(\frac{-1}{e}\right) = \frac{1}{e}, \\ \int_1^{\infty} xe^{1-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{1-x}(1+x)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-(1+b)}{e^{b-1}} + 2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^{b-1}} + 2 = 2. \end{aligned}$$

En consecuencia, la integral es convergente y su valor es

$$I = \frac{2}{e} + 2.$$



Gráfica de  $f$

**Ejercicio 2.** Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$

y dibujar varias curvas de ambas familias.

---

**Solución.** Las curvas dadas son circunferencias con centro en  $(c, 0)$  y radio  $|c|$ . Su ecuación implícita es  $0 = (x - c)^2 + y^2 - c^2 = x^2 - 2cx + y^2$ . Derivando respecto a  $x$ , obtenemos  $2x - 2c + 2yy' = 0$ . Dado que  $2cx = x^2 + y^2$ , la ecuación diferencial de la familia dada es

$$2x^2 - (x^2 + y^2) + 2xyy' = 0 \iff y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

La ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales es

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Esta ecuación es homogénea, luego introducimos la variable  $v = y/x$ . Derivando  $vx = y$ , obtenemos

$$v'x + v = y' = \frac{2(y/x)}{1 - (y/x)^2} = \frac{2v}{1 - v^2}.$$

La ecuación para la nueva variable  $v$  es

$$v'x = \frac{2v}{1 - v^2} - v = \frac{v + v^3}{1 - v^2} \iff \left( \frac{1 - v^2}{v + v^3} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Se trata de una ecuación de variables separadas que integramos

$$\int \frac{1 - v^2}{v(1 + v^2)} dv = \int \frac{1}{x} dx.$$

Para calcular la primera primitiva, descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1 - v^2}{v(1 + v^2)} = \frac{A}{v} + \frac{Bv + C}{1 + v^2}.$$

La ecuación  $1 - v^2 = A(1 + v^2) + (Bv + C)v = (A + B)v^2 + Cv + A$  implica que  $A + B = -1$ ,  $C = 0$ ,  $A = 1$ , por lo que  $B = -2$ . En conclusión

$$\frac{1 - v^2}{v(1 + v^2)} = \frac{1}{v} - \frac{2v}{1 + v^2}.$$

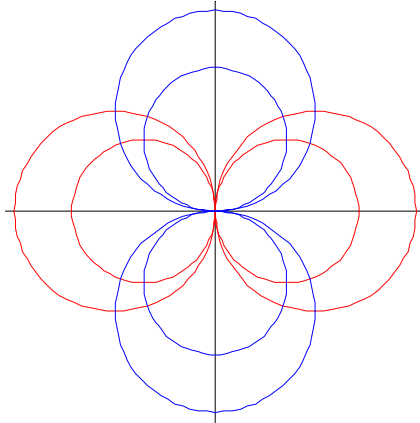
La igualdad entre las primitivas es

$$\begin{aligned} \ln|x| + \ln|C| &= \int \frac{1}{v} dv - \int \frac{2v}{1 + v^2} dv = \ln|v| - \ln(1 + v^2) = \ln \left| \frac{v}{1 + v^2} \right| \\ &= \ln \left| \frac{y/x}{1 + (y/x)^2} \right| = \ln \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia de trayectorias ortogonales verifica

$$|Cx| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \iff x^2 + y^2 = 2dy \iff x^2 + (y - d)^2 = d^2,$$

donde  $2d = 1/C$ . Observemos que las curvas ortogonales son circunferencias con centro en  $(0, d)$  y radio  $|d|$ .



**Ejercicio 3.** Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

---

**Solución.** El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n}}{\frac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3},$$

La serie converge absolutamente en el intervalo abierto  $|x-2| < \frac{1}{3}$ . Estudiamos la convergencia en los puntos terminales  $x-2 = -\frac{1}{3}$  y  $x-2 = \frac{1}{3}$ . En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En consecuencia, la serie es convergente en el intervalo  $-\frac{1}{3} \leq x-2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq x < \frac{7}{3}$ .

Para sumar la serie, definimos  $z = 3(x-2)$ . Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

para  $z \in [-1, 1)$ . Sabemos que la suma de la serie geométrica es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad -1 < t < 1.$$

Si  $z \in [0, 1)$  entonces integrando en el intervalo  $[0, z]$ , obtenemos

$$\int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^z t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int_0^z \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-z).$$

Si  $z \in (-1, 0]$  entonces integrando en el intervalo  $[z, 0]$ , obtenemos

$$\int_z^0 \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^{n+1}}{n+1} = \int_z^0 \frac{1}{1-t} dt = \int_0^{-z} \frac{1}{1+u} du = \ln(1-z).$$

En consecuencia, para todo  $z \in (-1, 1)$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-z),$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = -\ln(1-3(x-2)) = -\ln(7-3x),$$

para todo

$$\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 5 < 3x < 7 \Leftrightarrow -7 < -3x < -5 \Leftrightarrow 0 < 7-3x < 2.$$