CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2002

Ejercicio 1. Obtener los extremos absolutos y relativos de la función

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3,$$

en el conjunto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solución. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto R que verifican $\nabla f(x,y) = (6xy^2 + 6x^2, 6x^2y + 6y^2) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 6x(y^2 + x) = 0, \\ 6y(x^2 + y) = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica que $x = 0$ o bien $x = -y^2$. Si $x = 0$, entonces la segunda ecuación implica que $y = 0$. Si $x = -y^2$, la segunda ecuación implica que $y = 0$ o bien $y = -x^2$. En el primer caso, obtenemos $x = 0$ y en el segundo caso

$$x = -y^2 = -x^4 \Longleftrightarrow x\left(x^3 + 1\right) = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = -1$, con lo que los puntos solución son $P_1 = (0,0)$ y $P_2 = (-1,-1)$.

Calculamos la matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y^2 + 12x & 12xy \\ 12xy & 6x^2 + 12y \end{pmatrix}.$$

En los puntos con gradiente nulo, dicha matriz es

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

El criterio del hessiano no decide en P_1 porque el determinante es cero y P_2 es un punto de silla porque $\det H(-1,-1) < 0$. Para analizar el carácter del punto P_1, observando que $f(0,0) = 0$, elegimos $\varepsilon > 0$ y las desigualdades

$$f(-\varepsilon, 0) = -2\varepsilon^3 < f(0,0) < 2\varepsilon^3 = f(\varepsilon, 0)$$

implican que $P_1 = (0,0)$ es un punto de silla.

La frontera de R se define con la restricción $g(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, resolviendo

$$\begin{cases} 6x\left(y^2+x\right) = 2\lambda x, \\ 6y\left(x^2+y\right) = 2\lambda y, \\ x^2+y^2-4 = 0. \end{cases}$$

Si $x = 0$, entonces $y = \pm 2$. En el caso de que $y = 0$, obtenemos $x = \pm 2$. Si ambos son no nulos, entonces el sistema es

$$\begin{cases} 3\left(y^2+x\right) = \lambda, \\ 3\left(x^2+y\right) = \lambda, \\ x^2+y^2-4 = 0. \end{cases}$$

Igualando las dos primera ecuaciones, obtenemos $y^2+x = x^2+y$, ecuación que es equivalente a $x^2-y^2 = x-y$. Por tanto $(x+y)(x-y) = x-y$, luego $x-y=0$ o bien $x+y=1$. En el primer caso, $x=y$ implica $2x^2 = 4$, luego $x = y = \pm\sqrt{2}$. Si $y = 1-x$, entonces

$$x^2+(1-x)^2 = 4 \iff 2x^2-2x-3 = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{2}.$$

Los puntos obtenidos son

$$\begin{aligned} &P_3 = (0,2), \ P_4 = (0,-2), \\ &P_5 = (2,0), \ P_6 = (-2,0), \\ &P_7 = \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \ P_8 = \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right), \\ &P_9 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right), \ P_{10} = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right). \end{aligned}$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$\begin{gathered} f(0,2) = 16, \ f(0,-2) = -16, \ f(2,0) = 16, \ f(-2,0) = -16, \\ f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 12+8\sqrt{2}, \ f\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = 12-8\sqrt{2}, \\ f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2},\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) = f\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = 17.75 \end{gathered}$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $(0,-2)$ y $(-2,0)$.

Ejercicio 2. Calcular el área encerrada en el lazo de la lemniscata

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

contenido en el semiplano $x \geq 0$,

1. Usando integrales dobles en coordenadas polares.

2. Aplicando el teorema de Green.

Solución. 1. En coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\operatorname{sen}\theta$, la ecuación de la lemniscata es $r^4 = 2a^2r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 2a^2r^2\cos 2\theta \Leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, donde $\cos 2\theta \geq 0$ implica que $2\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, por lo que $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. En el semiplano positivo, la ecuación del lazo es $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ y el recinto que encierra dicho lazo es

$$D = \left\{(r,\theta) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq a\sqrt{2\cos 2\theta}\right\}.$$

Calculamos el área

$$\begin{aligned}
\text{\it área}\,(D) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a^2.
\end{aligned}$$

2. El teorema de Green implica que $\text{\it área}\,(D) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$, donde la curva $C : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada por

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta = a\sqrt{2\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y(\theta) = r\operatorname{sen}\theta = a\sqrt{2\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Para obtener la integral de línea, calculamos

$$\begin{aligned}
x'(\theta) &= \frac{-2a\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\cos\theta - a\sqrt{2\cos 2\theta}\operatorname{sen}\theta, \\
y'(\theta) &= \frac{-2a\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\operatorname{sen}\theta + a\sqrt{2\cos 2\theta}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\text{\it área}\,(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(xy' - yx'\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = a^2.$$

Ejercicio 3. Sea Ω el sólido comprendido en el interior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que es exterior al cono $(z-1)^2 = x^2 + y^2$. Sea S_1 la parte de la frontera de Ω correspondiente a la esfera y S_2 la parte de la frontera de Ω correspondiente al cono.

1. Obtener el área de la superficie $S = S_1 \cup S_2$, frontera de Ω, parametrizando S_1 y S_2.

2. Calcular el flujo de salida del campo $F(x, y, z) = (x - z, y - z, z)$ a través de la frontera S del sólido Ω, directamente y utilizando el teorema de Gauss.

Solución. La intersección de la esfera y el cono verifica

$$(z-1)^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow 2z(z-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} z = 0, & x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

Entonces el sólido es

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1, \ \ (z-1)^2 \le x^2 + y^2 \le 1 - z^2 \right\}.$$

1. La parametrización de S_1 con *coordenadas esféricas* es

$$S_1(\phi, \theta) = (\operatorname{sen}\phi \cos\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\phi), \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} (S_1)_\phi \times (S_1)_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi \operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\phi \right). \end{aligned}$$

Para calcular el área, obtenemos

$$\left\| (S_1)_\phi \times (S_1)_\theta \right\| = \sqrt{\operatorname{sen}^4\phi + \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{sen}\phi,$$

porque $\operatorname{sen}\phi \ge 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$. Entonces, el área de S_1 es

$$\acute{a}rea\,(S_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \left[-\cos\phi \right]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

En el cono, las *coordenadas cilíndricas* $x = r\cos t$, $y = r\operatorname{sen} t$, implican que

$$(z-1)^2 = r^2 \Longrightarrow z-1 = \pm r \Longrightarrow z = 1 \pm r.$$

Dado que $0 \leq z \leq 1$, eligiendo $z = 1 - r$ tenemos que $0 \leq r \leq 1$. Entonces, la parametrización de S_2 es

$$S_2(r,t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, 1-r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$(S_2)_r \times (S_2)_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \operatorname{sen} t & -1 \\ -r\operatorname{sen} t & r\cos t & 0 \end{vmatrix} = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, r).$$

A continuación, calculamos

$$\|(S_2)_r \times (S_2)_t\| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Entonces, el área de S_2 es

$$\acute{a}rea\,(S_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2}\,dr\,dt = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

En consecuencia, el $\acute{a}rea\,(S) = 2\pi + \pi\sqrt{2} = \pi\left(2+\sqrt{2}\right)$.

2. El flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (x-z, y-z, z)$ a través de S es

$$\iint_S F\cdot n\,dS = \iint_{S_1} F\cdot n\,dS + \iint_{S_2} F\cdot n\,dS.$$

En el punto $S_1(\pi/2, 0) = (1,0,0)$ el producto vectorial fundamental

$$\left((S_1)_\phi \times (S_1)_\theta\right)(\pi/2, 0) = (1,0,0)$$

tiene la dirección exterior. El producto escalar $F[S_1(\phi,\theta)]\cdot\left((S_1)_\phi \times (S_1)_\theta\right) =$

$$(\operatorname{sen}\phi\cos\theta - \cos\phi, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta - \cos\phi, \cos\phi)\cdot\left(\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\phi\right)$$
$$= \operatorname{sen}^3\phi\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) - \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi$$
$$= \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta).$$

El flujo exterior a través de S_1 es

$$\iint_{S_1} F\cdot n\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\right]\,d\phi\,d\theta$$
$$= 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$
$$= 2\pi - \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

En el punto $S_2(1,0)=(1,0,0)$ el producto vectorial fundamental

$$((S_2)_r \times (S_2)_t)(1,0)=(1,0,1)$$

tiene la dirección *interior al sólido* Ω. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned}
F[S_2(r,t)]\cdot((S_2)_r \times (S_2)_t) &= (r\cos t-1+r, r\operatorname{sen} t-1+r, 1-r)\cdot(r\cos t, r\operatorname{sen} t, r)\\
&= r^2\left(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t\right)+r(r-1)(\cos t+\operatorname{sen} t)+r-r^2\\
&= r(r-1)(\cos t+\operatorname{sen} t)+r.
\end{aligned}$$

El flujo exterior a través de S_2 es

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} F\cdot n\, dS &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[r+r(r-1)(\cos t+\operatorname{sen} t)\right]\, dt\, dr\\
&= -\frac{2\pi}{2}-\int_0^1 r(r-1)\left[\operatorname{sen} t-\cos t\right]_0^{2\pi}\, dr\\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

En consecuencia, el flujo exterior a través de S es π.

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint_S F\cdot n\, dS=\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz.$$

Dado que $\operatorname{div}(F)=F_x+F_y+F_z=3$, tenemos que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz=3\operatorname{vol}(\Omega)=3\int_0^1 A(z)\, dz,$$

donde $A(z)$ es el área del anillo circular de radio menor $z-1$ y radio mayor $\sqrt{1-z^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
3\int_0^1 A(z)\, dz &= 3\int_0^1 \pi\left(1-z^2-(z-1)^2\right)\, dz\\
&= 6\pi\int_0^1\left(z-z^2\right)\, dz = 6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
&= \pi.
\end{aligned}$$