

Cálculo. Primer curso de Ingenieros de Telecomunicación.
Curso 2001-2002. Examen de Septiembre. 6 de Septiembre de 2002.

Primera parte

Ejercicio 1.

Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un ángulo agudo dado α con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.



Ejercicio 2.

Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f , especificando su dominio de convergencia.

Ejercicio 3.

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{7x + 3}{x^a(1 + x^3)} dx$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Segunda parte

Ejercicio 4.

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ejercicio 5.

Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y)$ a través de la frontera S de V .

Ejercicio 6.

Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

Ejercicio 1.

Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un ángulo agudo dado α con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

Resolución



Llamemos B y b a las bases mayor y menor respectivamente del trapecio sección y c a la longitud de su lado inclinado, correspondiente a la pared lateral del canal. La tangente del ángulo α será $\tan \alpha = \frac{h}{\left(\frac{B-b}{2}\right)}$ y su seno $\sin \alpha = \frac{h}{c}$. Tendremos que para el área se tendrá $A = \frac{(B+b)}{2}h$. Entonces tenemos:

$$B - b = \frac{2h}{\tan \alpha}, \quad B + b = \frac{2A}{h}$$

de donde restando resulta $b = \frac{A}{h} - \frac{h}{\tan \alpha}$ y, despejando el valor de c en la expresión del $\sin \alpha$, se obtiene $c = \frac{h}{\sin \alpha}$. La función a minimizar es, por lo tanto,

$$f(h) = b + 2c = \frac{A}{h} - \frac{h}{\tan \alpha} + \frac{2h}{\sin \alpha} = \frac{A}{h} + h \left(\frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

en el intervalo $[0, H]$ donde H corresponde a la altura máxima posible (máxima profundidad posible para el canal) que se obtiene cuando la sección es triangular y $b = 0$, es decir, para $H = \sqrt{A \tan \alpha}$.

El problema se reduce ahora a determinar los puntos críticos de $f(h)$ en el intervalo $(0, \sqrt{A \tan \alpha})$ y analizarlos junto a los extremos de dicho intervalo. Observemos que f es derivable salvo en 0, por lo que los únicos puntos críticos interiores al intervalo serán los ceros de la derivada:

$$f'(h) = 0 \iff \frac{-A}{h^2} + \left(\frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = 0 \iff h^2 = \frac{A \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}$$

El único punto crítico interior se presenta en $h_0 = \sqrt{\frac{A \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}$, que es menor que $\sqrt{A \tan \alpha}$ ya que $\cos \alpha < 1 < 2 - \cos \alpha$, $\forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Puesto que $f''(h) = \frac{2A}{h^3} > 0$ en todo el intervalo $(0, \sqrt{A \tan \alpha})$, se trata de un mínimo absoluto en $[0, \sqrt{A \tan \alpha}]$. Por tanto la profundidad pedida es

$$h_0 = \sqrt{\frac{A \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}$$

Ejercicio 2.

Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f , especificando su dominio de convergencia.

Resolución.

La función dada es derivable en todo \mathbb{R} y su derivada es $f'(x) = \frac{2x}{4+x^2} = \frac{x/2}{1+(x/2)^2}$ que, para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ o, lo que es igual, para $|x| < 2$, es la suma de una serie geométrica de primer término $x/2$ y razón $-\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Puesto que las derivadas sucesivas de la función tienen expresiones cada vez más complicadas, obtendremos la serie de Maclaurin de f a partir de la de su derivada, que será la serie geométrica citada:

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \left(\frac{x}{2}\right)^9 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

cuyo radio de convergencia es 2, puesto que converge para $|x| < 2$, como hemos dicho.

Integrando la serie anterior término a término y determinando en la forma acostumbrada el valor de la constante de integración, se obtiene, para $|x| < 2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= k + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2^3} \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2^5} \frac{x^6}{6} - \dots = k + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \\ &= f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{x^{2n+2}}{2(n+1)} = \\ &= \log(4) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}} \end{aligned}$$

El radio de convergencia es 2, el mismo de la serie de la que procede. Estudiaremos el comportamiento en los extremos. Observemos que para $x = -2$ y para $x = 2$ la serie toma el mismo valor por aparecer solo potencias pares de x . Por ejemplo para $x = 2$ resulta la serie

$$\log(4) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)}$$

que es obviamente convergente por el criterio de Leibnitz para series alternadas. Por tanto el dominio de convergencia de esta serie es el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Ejercicio 3.

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} dx$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Resolución.

La integral presenta problemas en 0 e infinito puesto que el punto -1 , que es el otro punto problemático del integrando, queda fuera del intervalo de integración. Así pues, para estudiar la convergencia, descomponemos la integral dada en dos, por ejemplo

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} dx = \int_0^1 \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} dx + \int_1^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} dx = I_1 + I_2$$

Para la primera de ambas integrales, I_1 , observamos que, para valores de x próximos a 0, el integrando se comporta como $\frac{3}{x^a}$. Utilizaremos el criterio de comparación por paso al límite con la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$, cuyo comportamiento conocemos. Calculamos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} \right)}{\left(\frac{1}{x^a} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x+3}{1+x^3} = 3 \neq 0$$

para concluir que ambas integrales tienen el mismo carácter. Deducimos que nuestra integral I_1 converge si, y solo si, es $\alpha < 1$.

Para la segunda de las integrales, I_2 , observamos que, para valores muy grandes y positivos de x , el integrando se comporta como $\frac{7x}{x^a(x^3)} = \frac{7x}{x^{a+3}} = \frac{7}{x^{a+2}}$. De forma análoga a la anterior, deducimos que nuestra integral tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{a+2}}$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{7x+3}{x^a(1+x^3)} \right)}{\left(\frac{1}{x^{a+2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(7x+3)}{1+x^3} = 7 \neq 0$$

por lo que I_2 converge si, y solo si, $a+2 > 1$, es decir, $a > -1$.

Finalmente La integral dada converge cuando lo hagan simultáneamente I_1 e I_2 , o sea, para $-1 < \alpha < 1$.

Ejercicio 4.

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Resolución.

Analizaremos en primer lugar el interior del conjunto A , determinando los puntos críticos de la función existentes en él. La función dada es diferenciable en todo el plano y se tiene

$$\begin{aligned} f_x &= 8x - 2xy^2 = 2x(4 - y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ o } y = \pm 2 \\ f_y &= 18y - 2x^2y = 2y(9 - x^2) = 0 \iff y = 0 \text{ o } x = \pm 3 \end{aligned}$$

luego los puntos críticos de la función son $(0,0)$, $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$, de los cuales únicamente el origen queda dentro de nuestro conjunto. Solamente nos interesan los extremos absolutos, por tanto guardaremos por ahora el punto $P_1 = (0,0)$ junto con el valor de la función $f(0,0) = 0$ y pasaremos a analizar la frontera de A utilizando multiplicadores de Lagrange para obtener los posibles puntos donde se alcanzan extremos de la función f con la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Debemos resolver

$$\begin{aligned} f_x - \lambda g_x &= 2x(4 - y^2) - 2\lambda x = 2x(4 - y^2 - \lambda) = 0 \iff x = 0 \text{ o } 4 - \lambda = y^2 \\ f_y - \lambda g_y &= 2y(9 - x^2) - 2\lambda y = 2y(9 - x^2 - \lambda) = 0 \iff y = 0 \text{ o } 9 - \lambda = x^2 \\ g &= x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (0,-2)$, (ambas correspondientes a $\lambda = 9$), $P_4 = (2,0)$, $P_5 = (-2,0)$, (ambas correspondientes a $\lambda = 4$), ya que para $9 - \lambda = x^2$, $4 - \lambda = y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ no hay solución real.

Puesto que en P_2 y P_3 la función toma el mismo valor $f(0, \pm 2) = 36$ y análogamente ocurre en P_4 y P_5 , donde $f(\pm 2, 0) = 16$, concluimos que el mínimo absoluto se alcanza en el origen, punto del interior del conjunto, y el máximo absoluto se alcanza en los dos puntos P_2 y P_3 .

Ejercicio 5.

Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y)$ a través de la frontera S de V .

Resolución.

Puesto que la superficie frontera del sólido tiene tres partes, el cálculo del flujo de salida requiere tres integrales de superficie. Además, el campo dado tiene una expresión complicada, mientras que su divergencia resulta muy simple:

$$\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 2x + x + 0 = 3x$$

Por todo ello se hace especialmente aconsejable utilizar el teorema de Gauss

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz$$

Necesitamos describir el sólido para tener los extremos de las integrales reiteradas mediante las cuales calcularemos esa integral triple. Completando el cuadrado, la ecuación de la superficie cilíndrica dada puede escribirse como $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. La proyección del sólido sobre el plano OXY es la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1 y z se mueve entre los dos planos dados, luego una posible descripción es

$$V \equiv \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{2y - y^2} \leq x \leq \sqrt{2y - y^2} \\ 0 \leq z \leq 2 - y \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_0^{2-y} 3x \, dz \, dx \, dy = \\ &= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} (2-y) 3x \, dx \, dy = \\ &= \int_0^2 (2-y) \left(\left[\frac{3x^2}{2} \right]_{x=-\sqrt{2y-y^2}}^{x=\sqrt{2y-y^2}} \right) dy = 0 \end{aligned}$$

ya que $\left[\frac{3x^2}{2} \right]_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} = 0$.

Ejercicio 6.

Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

Resolución.

El área de la superficie viene dada por

$$\iint_{S_1} dS = \iint_D \|r_u \times r_v\| \, du \, dv$$

donde $r = r(u, v)$ representa el vector posición de un punto de la superficie en función de dos parámetros adecuadamente elegidos y D es el recinto donde esos parámetros se han de mover.

Comenzaremos parametrizando la superficie $x^2 + y^2 = 2y$, o, equivalentemente, $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Puesto que se trata de un cilindro vertical, un parámetro basta para describir la ecuación (que también es la de la curva proyección) y el otro se deberá usar para describir la z . Una de las posibles parametrizaciones es

$$S_1 \equiv \begin{cases} x = \cos(u) \\ y = 1 + \operatorname{sen}(u) \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in D \equiv \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 2 - (1 + \operatorname{sen}(u)) \end{cases}$$

Resulta

$$r_u \times r_v = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) \\ \operatorname{sen}(u) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|r_u \times r_v\| = 1$$

Por lo que el área pedida vale

$$\iint_D du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}(u)} dv \, du = \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}(u)) \, du = 2\pi.$$