CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2003

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Analizar la concavidad y convexidad, obtener los puntos de inflexión y esbozar la gráfica de $y = e^{-x^2}$. Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base en el eje OX y dos vértices en la gráfica de $y = e^{-x^2}$.

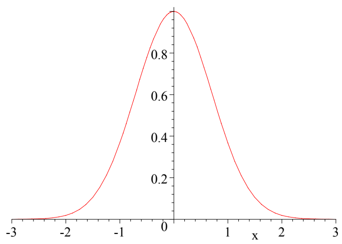
Solución. Para determinar los dominios de concavidad y convexidad, calculamos

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right).$$

Dado que $2e^{-x^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$y'' > 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En consecuencia, la gráfica es convexa en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. De manera análoga, obtenemos que $y'' < 0 \Longleftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que la gráfica es cóncava en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Los puntos de inflexión son las soluciones de $y'' = 0$, es decir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



El rectángulo tiene dos vértices en el eje OX y dos vértices en la gráfica de la curva. Como dicha gráfica es simétrica respecto al eje OY, tenemos que las coordenadas de los vértices en el eje OX deben ser $(-x, 0)$ y $(x, 0)$, donde $x \in (0, \infty)$. Los otros dos vértices son $\left(-x, e^{-x^2}\right)$ y $\left(x, e^{-x^2}\right)$. Entonces, el área del rectángulo es $A(x) = 2xe^{-x^2}$, donde $x \in (0, \infty)$. Calculamos los puntos críticos, resolviendo $A'(x) = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En el intervalo $(0, \infty)$ el único punto crítico es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y dado que $A'(x) > 0$ si $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $A'(x) < 0$ si $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, el punto crítico es un máximo. En consecuencia, el rectángulo de área máxima tiene base $\sqrt{2}$ y altura $e^{-1/2}$.

Ejercicio 2. Se consideran las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} (x-2)^n, \quad p \geq 0.$$

1. Determinar su radio y dominio de convergencia según los valores de p.
2. Para el caso $p = 1$, obtener la suma de la serie en el interior del intervalo de convergencia.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^p}{(n+1)^p} = 1,$$

para cualquier $p \geq 0$, por lo que las series son convergentes al menos en $(1,3)$.

Si $p = 0$, la serie en el punto $x = 1$ tiene término general $a_n = 1$, para todo $n \geq 0$, luego es divergente. En $x = 3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ no cumple la condición necesaria de convergencia. Entonces, el dominio de convergencia es $(1,3)$.

Si $0 < p \leq 1$, en el punto $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

es una p-serie divergente. En el punto $x = 3$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$ converge debido al criterio de Leibniz para series alternadas. Por ello, el dominio de convergencia es $(1,3]$.

Si $p > 1$, en el punto $x = 1$, la serie es una p-serie convergente, por lo que también converge en $x = 3$. En este caso, el dominio de convergencia es $[1,3]$.

Para calcular la suma de la serie para $p = 1$, definimos $z = x - 2$. Integrando la suma de la serie geométrica

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad -1 < t < 1,$$

obtenemos

$$\int_0^z \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^z (-1)^n t^n\, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

En consecuencia, la suma de la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{\ln(1+z)}{z} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-2)^n = \frac{\ln(x-1)}{x-2},$$

para todo $x \in (1,3)$ con $x \neq 2$.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen Final. 5 de Julio de 2003
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2=2ax$, que está comprendido entre el plano $z=0$ y la parte superior del cono $x^2+y^2=z^2$.

Solución. Usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$

la ecuación del cilindro es $r^2 = 2ar\cos\theta \iff r = 2a\cos\theta$, donde $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. El interior del cilindro verifica $0 \le r \le 2a\cos\theta$. La ecuación de la parte superior del cono es $z=r$, por lo que $0 \le z \le r$. Entonces, el sólido

$$V = \left\{(r,\theta,z) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le r \le 2a\cos\theta,\ \ 0 \le z \le r\right\}.$$

Como el jacobiano del cambio de coordenadas es r, el volumen es

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(V) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^r r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{8a^3}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea C la curva intersección del plano $y + \sqrt{2}z = 0$ con el elipsoide $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 1$, orientada positivamente cuando se la mira desde un punto situado muy arriba en el eje OZ. Calcular

$$\int_C (-y + \cos e^x)\ dx + y\,dy + z\,dz$$

aplicando el teorema de Stokes sobre una superficie plana adecuada.

Solución. Los puntos del plano $y = -\sqrt{2}z$ verifican $y^2 = 2z^2$, lo que implica que la curva C es

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

Entonces, consideramos la superficie plana

$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \ \ y + \sqrt{2}z = 0\right\}$$

cuya frontera es la curva C. Parametrizamos S usando coordenadas cartesianas, es decir,

$$S\left(x, y\right) = \left(x, y, -\frac{y}{\sqrt{2}}\right), \ \ (x, y) \in D,$$

donde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Es un vector constante que tiene la dirección del vector normal al plano y la orientación que induce coincide con la que tiene la curva C. A continuación, calculamos el rotacional del campo $F\left(x, y, z\right) = (-y + \cos e^x, y, z)$,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y + \cos e^x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 1).$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy = \pi.$$