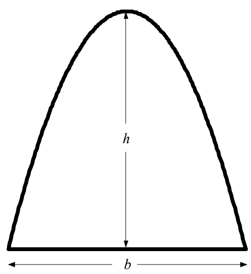
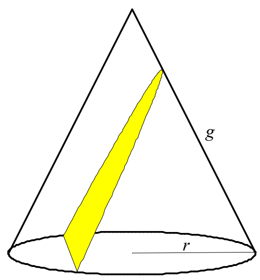
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2003

Ejercicio 1. Deducir la fórmula del área de un segmento parabólico en función de su base y su altura. Se considera un cono circular recto con radio de la base r y generatrices de longitud g. Al cortarlo por un plano paralelo a una de dichas generatrices se obtiene como intersección un segmento parabólico. Calcular el área máxima de los segmentos parabólicos obtenidos por este procedimiento.





Solución: Elegimos un sistema de coordenadas tal que la base del segmento está contenida en el eje x y el vértice de la parábola es un punto del eje y. Entonces, denotando $y = ax^2 + Bx + c$, tenemos que la solución de $y' = 2ax + B = 0$ es $x = -B/2a = 0$, lo que implica que $B = 0$. Además, la coordenada y del vértice es $y(0) = c = h$. Finalmente, los puntos intersección de la parábola con el eje x verifican

$$y = ax^2 + h = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{h}{a}} = \pm\frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{h}{a} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow a = -\frac{4h}{b^2}.$$

En consecuencia, la ecuación de la parábola es

$$y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h = h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right).$$

El área del segmento parabólico, en función de su base y su altura, es

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{b/2} h\left(1 - \frac{4x^2}{b^2}\right)\,dx = 2h\left(x - \frac{4x^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^{b/2} \\ &= 2h\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6}\right) = 2h\frac{2b}{6} = \frac{2}{3}bh. \end{aligned}$$

Si elegimos un sistema de coordenadas xyz tal que la base del cono está contenida en el plano xy y el origen coincide con el centro de dicha base, los puntos intersección de las parábolas con dicho plano son $\left(x, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$ y $\left(x, -\sqrt{r^2 - x^2}\right)$, donde $x \in [-r, r]$. Por lo tanto, las bases de los sementos parabólicos son $b(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, donde $x \in [-r, r]$.

Si denotamos por α el ángulo formado por una recta generatriz y su proyección sobre el plano xy, tenemos que $\cos\alpha = r/g$. La altura $h(x)$ y la generatriz opuesta forman un triángulo isósceles con dos ángulos iguales a α cuya base es $r - x$. Entonces

$$\cos\alpha = \frac{\frac{r-x}{2}}{h(x)} = \frac{r}{g} \Longrightarrow h(x) = \frac{g(r-x)}{2r}, \quad -r \leq x \leq r.$$

El área de los segmentos parabólicos es

$$A(x) = \frac{2}{3} b(x)\, h(x) = \frac{4}{3}\sqrt{r^2 - x^2}\frac{g(r-x)}{2r} = \frac{2g}{3r}(r-x)\sqrt{r^2 - x^2},$$

donde $-r \leq x \leq r$. Para calcular el área máxima, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2g}{3r}\left(-\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x(r-x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{2g}{3r}\left(\frac{-(r^2 - x^2) - rx + x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) \\ &= \frac{2g}{3r}\left(\frac{2x^2 - rx - r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = 0, \end{aligned}$$

lo que implica $2x^2 - rx - r^2 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son los puntos críticos

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{4} = \frac{r \pm 3r}{4} = \begin{cases} r \\ -r/2. \end{cases}$$

Dado que en los extremos $A(r) = A(-r) = 0$ y en el único punto crítico que es interior, tenemos

$$A(-r/2) = \frac{2g}{3r}\frac{3r}{2}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = g\sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}gr,$$

este valor es el área máxima de los segmentos parabólicos.

Ejercicio 2. La curva $y = x^k$, $0 \le x \le 1$, donde $k > 0$, divide el cuadrado formado por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$, en dos regiones R_1 (la superior) y R_2 (la inferior). Obtener por el método de los discos, el volumen V_1 del sólido generado al girar la región R_1 en torno al eje y. Obtener por el método de las capas (o de los tubos), el volumen V_2 del sólido generado al girar la región R_2 en torno al eje y. En el caso $k = 2$, obtener el área de la superficie generada al girar la curva dada en torno al eje y y la longitud de dicha curva.

Solución: Las regiones definidas por la curva $y = x^k$ en el cuadrado unidad son

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ \ x^k \le y \le 1\right\}, \\ R_2 &= \left\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x^k\right\}. \end{aligned}$$

El volumen del sólido generado al girar R_1 alrededor del eje y, usando el método de los discos, es

$$V_1 = \pi \int_0^1 x\,(y)^2\,dy = \pi \int_0^1 \left(y^{\frac{1}{k}}\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{\frac{2}{k}}\,dy = \pi \left.\frac{y^{\frac{2}{k}+1}}{\frac{2}{k}+1}\right|_0^1 = \frac{k\pi}{k+2}.$$

El volumen del sólido generado al girar R_2 alrededor del eje y, usando el método de las capas, es

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 xy\,dx = 2\pi \int_0^1 x^{k+1}\,dx = 2\pi \left.\frac{x^{k+2}}{k+2}\right|_0^1 = \frac{2\pi}{k+2}.$$

El área de la superficie generada al girar $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, alrededor del eje y es

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx \\ &= 2\pi \frac{2}{3}\frac{1}{8}\left.\left(1+4x^2\right)^{3/2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right). \end{aligned}$$

La longitud de la curva $y = x^2$ definida en $[0,1]$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{(1/2)^2 + x^2}\,dx.$$

En primer lugar, vamos a calcular una primitiva de la función $\sqrt{a^2+x^2}$. Usando la sustitución $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, obtenemos $dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ y además

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\,\mathrm{sh}^2\,t} = a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,t} = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\,t} = a\,\mathrm{ch}\,t.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx &= \int a^2 \operatorname{ch}^2 t\,dt = a^2 \int \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{a^2}{4}\int \left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right) dt \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t\right)+C = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t+e^{-t}\right)}{2}+2t\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t+2t\right)+C = \frac{a^2}{4}\left(\frac{2x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}+2\operatorname{arg\,sh}\frac{x}{a}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}+2\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right|\right)+C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|+C \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C^*.
\end{aligned}
$$

A continuación, calculamos la integral definida

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^1 \sqrt{\left(1/2\right)^2+x^2}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sqrt{5}/2}{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3. Se considera la función $f(x) = \ln(1+x)$ definida en el intervalo $(-1, \infty)$. Obtener la serie de Taylor en cero de f, su radio y su dominio de convergencia. Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}\, dx.$$

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n},$$

y obtener su suma en caso de que sea convergente.

Solución: La derivada de la función $f(t) = \ln(1+t)$ satisface

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,$$

donde $|t| < 1$. Integrando la derivada entre 0 y x, obtenemos

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

por lo que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

es la serie de Taylor de f, debido a su unicidad. El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

La serie converge absolutamente en $(-1, 1)$. Estudiamos la convergencia en los puntos terminales $x = -1$ y $x = 1$. En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. Entonces la serie es convergente en el intervalo $(-1,1]$.

Para analizar la integral impropia, usamos el criterio de comparación por límites con la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

que es convergente si $\alpha < 1$ y divergente si $\alpha \geq 1$. Calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^p} = 1$$

si $p = \alpha$ porque $\ln(1+x)$ y $\operatorname{sen} x$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0^+$. En consecuencia, la integral es convergente si $p < 1$ y divergente si $p \geq 1$.

Aplicando el criterio del cociente a la serie, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

por lo que la serie es convergente. Para sumarla, usando el apartado 1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n2^n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.
\end{aligned}$$