

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 11 de Junio de 2003

Ejercicio 1. Calcular el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Probar que el elipsoide de volumen máximo, sujeto a la condición de que $a + b + c$ sea constante, es una esfera.

Solución. Usando las coordenadas $x = ar \cos \phi \cos \theta$, $y = br \cos \phi \sin \theta$, $z = cr \sin \phi$, la ecuación del elipsoide es $r = 1$ y el sólido que encierra esta superficie es

$$E = \{(r, \phi, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

El jacobiano de este cambio de coordenadas es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} a \cos \phi \cos \theta & -a r \sin \phi \cos \theta & -ar \cos \phi \sin \theta \\ b \cos \phi \sin \theta & -br \sin \phi \sin \theta & br \cos \phi \cos \theta \\ c \sin \phi & -cr \cos \phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= c \cos \phi \begin{vmatrix} ar \cos \phi \cos \theta & -ar \sin \phi \cos \theta \\ br \cos \phi \sin \theta & br \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} + cr \sin \phi \begin{vmatrix} a \cos \phi \cos \theta & -ar \cos \phi \sin \theta \\ b \cos \phi \sin \theta & br \cos \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= abc r^2 \cos^2 \phi \sin \phi + abc r^2 \sin^3 \phi = abc r^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables, obtenemos

$$\text{vol}(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 abc r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = abc 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi abc.$$

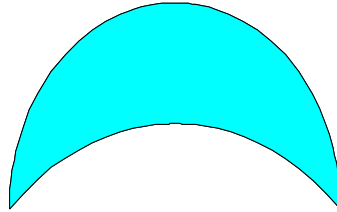
La función objetivo $f(a, b, c) = \frac{4}{3} \pi abc$ es no negativa y sólo se anula si al menos uno de los semiejes a, b, c es nulo; en cuyo caso se obtendría el valor mínimo. Entonces, podemos suponer que $a, b, c > 0$. La restricción es $g(a, b, c) = a + b + c - k = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, resolviendo

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi bc = \lambda, \\ \frac{4}{3} \pi ac = \lambda, \\ \frac{4}{3} \pi ab = \lambda, \\ a + b + c = k. \end{cases}$$

Igualando las tres primera ecuaciones, obtenemos $bc = ac = ab$, que con la cuarta implican $a = b = c = \frac{k}{3}$. Entonces hemos obtenido una esfera de radio $\frac{k}{3}$, con $\text{vol} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{k}{3} \right)^3 = \frac{4\pi k^3}{81}$.

Ejercicio 2. (*Cuadratura de la luna*) Consideremos la región R del plano que es exterior a la circunferencia con centro en $(0, 0)$ que pasa por el punto (a, a) e interior a la circunferencia con centro en $(0, a)$ y radio a . Usando el teorema de Green, demostrar que el área de dicha región coincide con el área de un cuadrado de lado a .

Solución.



La ecuación de la circunferencia con centro en $(0, a)$ y radio a es $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. La ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ que pasa por (a, a) es $x^2 + y^2 = 2a^2$. Los puntos de intersección de ambas son $(-a, a)$ y (a, a) que tienen coordenadas polares $(a\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(a\sqrt{2}, \pi/4)$ respectivamente.

La curva cerrada C que forma la frontera de R es unión de la curva C_1 parametrizada por $x(\theta) = a \cos \theta$, $y(\theta) = a + a \sin \theta$, donde $\theta \in [0, \pi]$ y de la curva C_2 parametrizada por $x(\theta) = a\sqrt{2} \cos \theta$, $y(\theta) = a\sqrt{2} \sin \theta$, donde $\theta \in [\pi/4, 3\pi/4]$.

El teorema de Green implica que

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx,$$

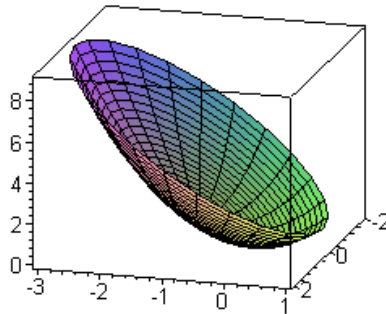
donde la orientación de C es positiva. Las orientaciones de C_1 y C_2 con las parametrizaciones dadas son antihorarias, por lo que para que C tenga orientación positiva, debemos usar la orientación horaria en C_2 , cambiando el signo de la integral de línea. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \frac{1}{2} \left(\int_{C_1} x dy - y dx - \int_{C_2} x dy - y dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi (a^2 \sin \theta + a^2) d\theta - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2a^2 d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 [-\cos \theta + \theta]_0^\pi - 2a^2 [\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2a^2 + \pi a^2 - \pi a^2) = a^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Sea S la porción del paraboloides $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el semiespacio $2y + z \leq 3$. Calcular el flujo de salida del campo $F(x, y, z) = (y + z, x + z, z)$ directamente y mediante el teorema de Gauss.

Indicación: Utilizar las coordenadas $x = r \cos \theta$, $y = -1 + r \sin \theta$, $z = z$, para parametrizar S .

Solución.



La ecuación del paraboloides con las coordenadas dadas es

$$z = r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 1)^2 = r^2 - 2r \sin \theta + 1,$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \leq 3 - 2y$ implica $r^2 - 2r \sin \theta + 1 \leq 5 - 2r \sin \theta$, lo que equivale a que $r^2 \leq 4$. En consecuencia, la parametrización de S es

$$S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta - 1, r^2 - 2r \sin \theta + 1), \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r - 2 \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & -2r \cos \theta \end{vmatrix} = (-2r^2 \cos \theta, 2r - 2r^2 \sin \theta, r).$$

En el punto $S(1, 0) = (1, -1, 2)$ el producto vectorial fundamental

$$(S_r \times S_\theta)(1, 0) = (-2, 2, 1)$$

tiene la dirección interior. El flujo de salida del campo $F(x, y, z) = (y + z, x + z, z)$ a través de S es

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} -F[S(r, \theta)] \cdot (S_r \times S_\theta) \, d\theta \, dr.$$

El producto escalar $-F[S(r, \theta)] \cdot (S_r \times S_\theta) =$

$$\begin{aligned} & (r^2 - r \sin \theta, r^2 - 2r \sin \theta + r \cos \theta + 1, r^2 - 2r \sin \theta + 1) \cdot (2r^2 \cos \theta, -2r + 2r^2 \sin \theta, -r) \\ & = 2r^4 (\cos \theta + \sin \theta) - 4r^3 \sin^2 \theta + 8r^2 \sin \theta - 2r^2 \cos \theta - 3r^3 - 3r. \end{aligned}$$

El flujo exterior a través de S , usando que $\sen^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, es

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 \int_0^{2\pi} [2r^4 (\cos \theta + \sen \theta) - 4r^3 \sen^2 \theta + 8r^2 \sen \theta - 2r^2 \cos \theta - 3r^3 - 3r] d\theta dr \\
&= \int_0^2 \left[2r^4 (\sen \theta - \cos \theta) - 4r^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sen 2\theta}{4} \right) - 8r^2 \cos \theta - 2r^2 \sen \theta - 3(r^3 + r) \theta \right]_0^{2\pi} dr \\
&= \int_0^2 [-4\pi r^3 - 6\pi (r^3 + r)] dr = \int_0^2 [-10\pi r^3 - 6\pi r] dr = -\pi \left[\frac{10r^4}{4} + 3r^2 \right]_0^2 \\
&= -\pi (40 + 12) = -52\pi.
\end{aligned}$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie T tal que $S \cup T$ es una superficie cerrada. Como T está contenida en el plano $z = 3 - 2y$, su parametrización es

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sen \theta - 1, 5 - 2r \sen \theta), \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sen \theta & -2 \sen \theta \\ -r \sen \theta & r \cos \theta & -2r \cos \theta \end{vmatrix} = (0, 2r, r).$$

Dado que $T_r \times T_\theta$ tiene la dirección exterior al sólido Ω encerrado por $S \cup T$, el flujo exterior a través de T es

$$\begin{aligned}
\iint_T F \cdot n dS &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r \sen \theta, r \cos \theta + 5 - 2r \sen \theta, 5 - 2r \sen \theta) \cdot (0, 2r, r) d\theta dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r (2r \cos \theta - 6r^2 \sen \theta + 15) d\theta dr \\
&= \int_0^2 r [2r \sen \theta + 6r^2 \cos \theta + 15\theta]_0^{2\pi} dr = \int_0^2 30\pi r dr \\
&= 30\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = 60\pi.
\end{aligned}$$

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de $S \cup T$ coincide con la integral triple de la divergencia de F* , es decir

$$\iint_{S \cup T} F \cdot n dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz.$$

Dado que $\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 1$, y el sólido

$$\Omega = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r^2 - 2r \sen \theta + 1 \leq z \leq 5 - 2r \sen \theta\},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2-2r\sin\theta+1}^{5-2r\sin\theta} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2) r \, dr \, d\theta = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi.\end{aligned}$$

Entonces, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S \cup T} F \cdot n \, dS - \iint_T F \cdot n \, dS = 8\pi - 60\pi = -52\pi.$$