CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2003
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Una vasija que tiene la forma del paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la curva $y = px^2$ en torno al eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcular el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de líquido cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio R.

Solución. Usando el *método de los discos,* el volumen V del líquido es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{pR^2} x^2\, dy = \pi \int_0^{pR^2} \frac{y}{p}\, dy \\ &= \frac{\pi}{p} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{pR^2} = \frac{\pi}{p} \frac{p^2 R^4}{2} \\ &= \frac{\pi p R^4}{2}. \end{aligned}$$

El área de la superficie mojada viene dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^R x\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_0^R x\sqrt{1 + 4p^2x^2}\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3} \frac{1}{8p^2} \left(1 + 4p^2x^2\right)^{3/2} \right]_0^R \\ &= \frac{\pi}{6p^2} \left[\left(1 + 4p^2R^2\right)^{3/2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

El cociente entre el área de la superficie y el volumen es

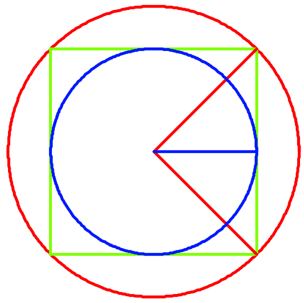
$$\begin{aligned} \frac{A}{V} &= \frac{\frac{\pi}{6p^2}\left[\left(1 + 4p^2R^2\right)^{3/2} - 1\right]}{\frac{\pi p R^4}{2}} \\ &= \frac{\left(1 + 4p^2R^2\right)^{3/2} - 1}{3p^3R^4}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

1. Dentro de un círculo de radio R se inscribe un cuadrado y dentro de éste un nuevo círculo. El proceso se repite indefinidamente. Determinar la suma de las áreas de todos los círculos resultantes.

2. A partir de la serie geométrica, obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

Solución. 1. Si R es el radio del círculo dado, tenemos que su área es $A_0 = \pi R^2$.



El radio y el área del nuevo círculo inscrito en el cuadrado son

$$R \cos \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Usando el principio de inducción, obtenemos que el radio y el área del n-ésimo círculo son

$$R \cos^n \frac{\pi}{4} = \frac{R}{2^{\frac{n}{2}}} \quad \text{y} \quad A_n = \frac{\pi R^2}{2^n}.$$

En consecuencia, la suma de las áreas de todos los círculos resultantes es

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi R^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2\pi R^2.$$

2. Derivando la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x < 1,$$

obtenemos

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nx^{2n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

El desarrollo en serie de potencias en el origen de la función es

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2nx^{2n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 1 de Septiembre de 2003

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Se desea construir un abrevadero para ganado con una chapa rectangular muy larga y con a metros de anchura. A ese efecto se pretende doblar hacia arriba dos tiras laterales de anchura x con un ángulo θ y tapar luego los extremos con dos piezas planas trapezoidales adecuadas iguales. Determinar x y θ de forma que el abrevadero resultante tenga volumen máximo y obtener el área de las piezas planas necesarias para tapar los extremos.

Solución. El volumen del abrevadero es el producto del área de la pieza plana trapezoidal por la longitud l de la chapa, es decir,

$$V = \frac{1}{2}(B+b)\,hl,$$

donde

$$b = a-2x, \quad B = a-2x+2x\cos\theta \quad \text{y} \quad h = x\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces

$$V(x,\theta) = (a-2x+x\cos\theta)\,x\operatorname{sen}\theta l = l\left[(a-2x)\,x\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right],$$

donde $0 \le x \le a/2$ y $0 \le \theta \le \pi/2$. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto que verifican $\nabla V(x,\theta) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} l\left[-2x\operatorname{sen}\theta + (a-2x)\operatorname{sen}\theta + 2x\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right] = 0, \\ l\left[(a-2x)\,x\cos\theta + x^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\right] = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica que

$$a\operatorname{sen}\theta + 2x(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\theta\left[a + 2x(\cos\theta - 2)\right] = 0.$$

En el interior del conjunto tenemos que $0 < \theta < \pi/2$, luego $\operatorname{sen}\theta > 0$. Esto implica que

$$a + 2x(\cos\theta - 2) = 0$$

y obtenemos

$$x = \frac{a}{2(2-\cos\theta)}.$$

Con este valor, la segunda ecuación es

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \left(a - \frac{a}{2-\cos\theta}\right)\frac{a\cos\theta}{2(2-\cos\theta)} + \frac{a^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)}{4\left(2-\cos\theta\right)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{a(2-\cos\theta)-a}{2-\cos\theta}\right)\frac{a\cos\theta}{2(2-\cos\theta)} + \frac{a^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)}{4\left(2-\cos\theta\right)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{2\left(a - a\cos\theta\right)a\cos\theta + a^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\left(2-\cos\theta\right)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{2a^2\cos\theta - a^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta}{4\left(2-\cos\theta\right)^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2a^2\cos\theta - a^2}{4\left(2-\cos\theta\right)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow a^2\left(2\cos\theta - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la anchura de cada tira y el ángulo obtenidos son

$$x = \frac{a}{2\left(2-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

En el punto interior obtenido, el área de cada pieza trapezoidal plana es

$$A = (a-2x)\,x\operatorname{sen}\theta + x^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a}{3}\right)^2\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

El volumen obtenido en el punto es

$$V\left(\frac{a}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 l.$$

A continuación, estudiamos los puntos críticos en los cuatro segmentos que forman la frontera. Si $x=0$ entonces $V=0$. Si $x=a/2$ el volumen viene dado por $V(\theta) = (a^2/4)\operatorname{sen}\theta\cos\theta l$, donde $0 \le \theta \le \pi/2$. Resolviendo la ecuación

$$V'(\theta) = \left(a^2/4\right)\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)l = 0,$$

obtenemos $\cos 2\theta = 0$, donde $0 \le 2\theta \le \pi$, luego $2\theta = \pi/2$ y el único punto crítico es $\theta = \pi/4$. Por tanto,

$$V\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2}{4}\frac{1}{2}l = \frac{1}{8}a^2 l.$$

Si $\theta = 0$ entonces $V = 0$. Si $\theta = \pi/2$ el volumen es $V(x) = (a-2x)\,xl$, donde $0 \le x \le a/2$. La ecuación

$$V'(x) = (-2x + a - 2x)\,l = (a-4x)\,l = 0,$$

tiene como única solución $x = a/4$. El volumen en dicho punto es

$$V\left(\frac{a}{4},\frac{\pi}{2}\right) = \left(a - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{4}l = \frac{1}{8}a^2 l.$$

Dado que $\frac{1}{8} < \frac{\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{3}$, el volumen máximo se alcanza en $(a/3, \pi/3)$ y el área de cada pieza es $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

Ejercicio 4. Sea Ω el recinto comprendido entre el exterior de un paraboloide y el interior de un elipsoide definido por

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z+3 \leq x^2+4y^2, \;\; x^2+4y^2+z^2 \leq 9\right\}.$$

Sea S la superficie que limita a Ω y sea $F(x,y,z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$. Calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ usando el teorema de Gauss.

Solución. El teorema de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F*, es decir

$$\iint\limits_S F \cdot n \, dS = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}(F) \; dx\, dy\, dz.$$

La divergencia de $F(x,y,z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$ es $\operatorname{div}(F) = z$, por lo que debemos calcular $\iiint_\Omega z \, dx\, dy\, dz$. Obtenemos la intersección del paraboloide y el elipsoide, resolviendo

$$\left.\begin{array}{r} z+3 = x^2+4y^2 \\ x^2+4y^2+z^2 = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow z+3+z^2 = 9 \Longrightarrow z^2+z-6 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\{\begin{array}{r} 2, \\ -3. \end{array}\right.$$

Entonces, la región Ω se puede describir como la unión de las secciones

$$A(z) = \left\{(x,y) : z+3 \leq x^2+4y^2 \leq 9-z^2\right\}, \quad -3 \leq z \leq 2.$$

Por ello, la integral triple verifica

$$\iiint_\Omega z \, dx\, dy\, dz = \int_{-3}^{2} \left(\iint\limits_{A(z)} dx\, dy \right) z \, dz = \int_{-3}^{2} \text{área}\,(A(z))\, z \, dz.$$

Cada sección $A(z)$ es el recinto comprendido entre las elipses $x^2+4y^2 = 9-z^2$ y $x^2+4y^2 = z+3$. Las ecuaciones canónicas de estas elipses son

$$\frac{x^2}{9-z^2} + \frac{y^2}{(9-z^2)/4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{z+3} + \frac{y^2}{(z+3)/4} = 1.$$

Las áreas de las regiones que encierran las elipses son, respectivamente,

$$A_1 = \pi\sqrt{9-z^2}\sqrt{\frac{9-z^2}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(9-z^2\right),$$
$$A_2 = \pi\sqrt{z+3}\sqrt{\frac{z+3}{4}} = \frac{\pi}{2}(z+3).$$

Entonces, el área $(A(z)) = A_1 - A_2 = \frac{\pi}{2}\left(6 - z^2 - z\right)$ y la integral pedida es

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz &= \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{2}\left(-z^3 - z^2 + 6z\right)\,dz = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} + 3z^2\right]_{-3}^{2} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 12 + \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 27\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-4 - \frac{8}{3} + 12 + \frac{81}{4} - 9 - 27\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{81}{4} - \frac{8}{3} - 28\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{-125}{12}\right) \\
&= -\frac{125\pi}{24}.
\end{aligned}
$$