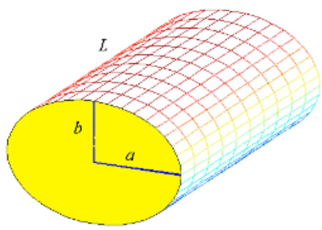
CÁLCULO

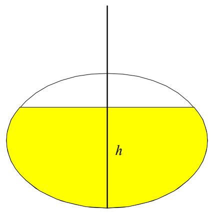
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 19 de Junio de 2004

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro elíptico, con semieje horizontal a, semieje vertical b y anchura L. Para medir su contenido se sumerge una vara hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcular el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.





Solución. Consideramos la elipse de semiejes a y b que es una sección del depósito. En primer lugar, calculamos el área de la porción de la elipse que está comprendida entre el vértice $(0, -b)$ y la recta $y = -b + h$. Dado que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

tenemos que las coordenadas de dos puntos simétricos respecto al eje y son

$$\left(a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y\right), \quad \left(-a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y\right),$$

donde $-b \le y \le b$. Entonces, el área de la porción de elipse es

$$A\left(h\right) = 2a \int_{-b}^{-b+h} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{2a}{b} \int_{-b}^{-b+h} \sqrt{b^2 - y^2}\, dy.$$

Para calcular la integral, usaremos el cambio de variable $y = b \operatorname{sen} t$, que verifica

$$\begin{aligned} y &= -b \Rightarrow \operatorname{sen} t = -1 \Rightarrow t = -\pi/2, \\ y &= -b + h \Rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{h}{b} - 1 \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b} - 1\right), \\ dy &= b \cos t\, dt, \ \sqrt{b^2 - y^2} = b\sqrt{\cos^2 t} = b\left|\cos t\right| = b \cos t. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} A\,(h) &= ab\int_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} 2\cos^2 t\,dt = ab\int_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} (1+\cos 2t)\ dt \\ &= ab\left[t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} \\ &= ab\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)+\frac{\pi}{2}+\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)}\right). \end{aligned}$$

Dado que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\,\cos t$, el valor de $\cos t$ en $t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)$ viene dado por $\cos t = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}$, y además $\operatorname{sen}(-\pi) = 0$, obtenemos

$$\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)} = \left(\frac{h}{b}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}.$$

El volumen de la gasolina que contiene el depósito es

$$V\,(h) = abL\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{b}-1\right)+\frac{\pi}{2}+\left(\frac{h}{b}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{h}{b}-1\right)^2}\right).$$

Ejercicio 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n,$$

calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1} = 1.$$

En el extremo $x = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ es divergente porque la sucesión $\left(n^3\right)_{n\geq 1}$ no converge a cero. Por la misma razón, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (-1)^n$ también es divergente. Entonces, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Para calcular la suma de la serie en los puntos tales que $|x| < 1$, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

para $|x| < 1$. Derivando, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

lo que implica $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \Big/ (1-x)^2$. Derivando ambos términos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

para $|x| < 1$. Multiplicando por x, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Derivando una vez más,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\right) = \frac{(2x+1)(1-x)^3 + 3\left(x^2+x\right)(1-x)^2}{(1-x)^6} \\
&= \frac{(2x+1)(1-x) + 3\left(x^2+x\right)}{(1-x)^4} = \frac{2x+1-2x^2-x+3x^2+3x}{(1-x)^4} \\
&= \frac{x^2+4x+1}{(x-1)^4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la suma de la serie en el dominio $|x| < 1$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x\left(x^2+4x+1\right)}{(x-1)^4}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 19 de Junio de 2004

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$, sobre el conjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ \ 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Solución. En primer lugar, buscamos puntos en el interior de M, tales que

$$\nabla f(x,y) = (8x-4, 2y-3) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (1/2, 3/2).$$

Las coordenadas del punto $P_1 = (1/2, 3/2)$ verifican $4(1/4) + 9/4 = 13/4 < 4$ y $3/2 > 0$, por lo que P_1 pertenece al interior de M. La frontera de M es la unión de la semielipse $4x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ y el segmento $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Usando multiplicadores de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$, con la restricción $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} 8x - 4 = \lambda 8x, \\ 2y - 3 = \lambda 2y, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 1, \\ 2y(1-\lambda) = 3. \end{cases}$$

Entonces, $6x(1-\lambda) = 3 = 2y(1-\lambda)$. Si $\lambda = 1$ obtenemos $8x - 4 = 8x$, por lo que necesariamente $\lambda \neq 1$ y podemos dividir por $(1-\lambda)$. Así, tenemos que $6x = 2y \Leftrightarrow 3x = y$, por lo que $4x^2 + 9x^2 - 4 = 0$, que implica $13x^2 = 4$. Las soluciones son $x = \pm 2\big/\sqrt{13}$ y sabemos que $y = 3x$, luego el único punto que verifica la restricción con $y \geq 0$ es

$$P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right).$$

En el segmento $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$, tenemos que $\nabla f = \lambda \nabla h$, con $h(x,y) = y$, implica

$$\begin{cases} 8x - 4 = 0, \\ 2y - 3 = \lambda, \\ y = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1/2, \\ \lambda = -3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Por tanto, el tercer punto es $P_3 = (1/2, 0)$. La intersección de la semielipse con el segmento proporciona los puntos $P_4 = (-1, 0)$ y $P_5 = (1, 0)$. Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_1) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4} - \frac{4}{2} - \frac{9}{2} = \frac{13}{4} - \frac{13}{2} = -\frac{13}{4} = -3.25,$$

$$f(P_2) = f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right) = 4 - \frac{8}{\sqrt{13}} - \frac{18}{\sqrt{13}} = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} \approx -3.2111,$$

$$f(P_3) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -1, \quad f(P_4) = f(-1,0) = 8, \quad f(P_5) = f(1,0) = 0.$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_4, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Sea S el octante positivo de la superficie esférica unidad.

1. Calcular la integral de superficie
$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\,dS.$$

2. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea $\oint_C F\cdot dr$, donde C es la curva frontera de S orientada por la normal exterior y
$$F(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

Solución 1. Parametrizamos S usando coordenadas esféricas, es decir,

$$S(\Phi,\theta)=(\operatorname{sen}\Phi\cos\theta,\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta,\cos\Phi),\quad (\Phi,\theta)\in[0,\pi/2]\times[0,\pi/2].$$

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} S_\Phi\times S_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\Phi\cos\theta & \cos\Phi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\Phi \\ -\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\Phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\operatorname{sen}^2\Phi\cos\theta,\operatorname{sen}^2\Phi\operatorname{sen}\theta,\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi\right). \end{aligned}$$

En primer lugar, obtenemos la norma del producto

$$\|S_\Phi\times S_\theta\|=\left(\operatorname{sen}^4\Phi+\operatorname{sen}^2\Phi\cos^2\Phi\right)^{1/2}=\left(\operatorname{sen}^2\Phi\right)^{1/2}=|\operatorname{sen}\Phi|=\operatorname{sen}\Phi,$$

porque $\Phi\in[0,\pi/2]$. A continuación, calculamos el valor del integrando en S,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\Phi\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\Phi\operatorname{sen}^2\theta+(\cos\Phi-1)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\Phi+\cos^2\Phi+1-2\cos\Phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\Phi}}. \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos la integral de superficie

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\,dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}\Phi}{\sqrt{2-2\cos\Phi}}\,d\Phi\,d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left[2(1-\cos\Phi)^{1/2}\right]_0^{\pi/2}d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Solución 2. Para calcular directamente $\oint_C F \cdot dr$, observemos que la curva frontera de S orientada por la normal exterior verifica $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 está contenida en el semiplano $\theta = \pi/2$, la curva C_2 en el semiplano $\theta = 0$ y C_2 en el plano $\Phi = \pi/2$, todas ellas con orientación antihoraria.

Parametrizamos $-C_1$ mediante

$$r_1(\Phi) = S\left(\frac{\pi}{2}, \Phi\right) = (0, \operatorname{sen}\Phi, \cos\Phi), \quad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dado que $F(r_1(\Phi)) = (0, \operatorname{sen}\Phi, \cos\Phi)$ y $r_1'(\Phi) = (0, \cos\Phi, -\operatorname{sen}\Phi)$, obtenemos

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi - \cos\Phi\operatorname{sen}\Phi)\, d\Phi = 0.$$

Una parametrización de C_2 viene dada por

$$r_2(\Phi) = S(0, \Phi) = (\operatorname{sen}\Phi, 0, \cos\Phi), \quad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Entonces $F(r_2(\Phi)) = (\operatorname{sen}\Phi, 0, \cos\Phi)$ y $r_2'(\Phi) = (\cos\Phi, 0, -\operatorname{sen}\Phi)$ implican $\int_{C_2} F \cdot dr = 0$. La curva C_3 se parametriza con

$$r_3(\theta) = S\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Análogamente, $F(r_3(\theta)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $r_3'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ implican $\int_{C_3} F \cdot dr = 0$. En consecuencia, la integral de línea $\oint_C F \cdot dr = 0$.

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS.$$

Para aplicarlo, calculamos el rotacional del campo vectorial $F(x, y, z)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{-3zy + 3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{3xz - 3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{-3yx + 3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (0, 0, 0) \cdot n\, dS = 0.$$