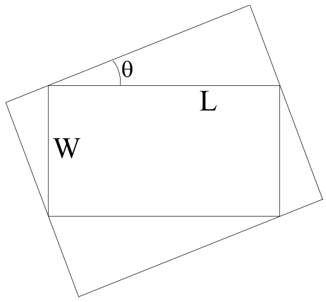
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 20 de Enero de 2004

Ejercicio 1. Calcular el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado de longitud L y anchura W.



Solución: Elegimos como variable el ángulo θ en radianes. Entonces, el área del rectángulo circunscrito es

$$A(\theta) = (L\cos\theta + W\operatorname{sen}\theta)(L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= (-L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta)(L\operatorname{sen}\theta + W\cos\theta) \\ &\quad + (L\cos\theta + W\operatorname{sen}\theta)(L\cos\theta - W\operatorname{sen}\theta) \\ &= W^2\cos^2\theta - L^2\operatorname{sen}^2\theta + L^2\cos^2\theta - W^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= L^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + W^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= \left(L^2 + W^2\right)\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) \\ &= \left(L^2 + W^2\right)\cos 2\theta = 0. \end{aligned}$$

Dado que $2\theta \in [0, \pi]$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Observemos que si $\theta \in [0, \pi/4)$ entonces $\cos 2\theta > 0$ y $A'(\theta) > 0$. Además, si $\theta \in (\pi/4, \pi/2]$ entonces $\cos 2\theta < 0$ y $A'(\theta) < 0$. En consecuencia, el área máxima del rectángulo circunscrito se alcanza en $\pi/4$ y su valor es

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = (L+W)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(L+W)^2}{2} = LW + \frac{L^2+W^2}{2}.$$

Ejercicio 2. Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 2x - x^2$ y $y = x^3$. Calcular

(a) el área de R,

(b) el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje x,

(c) el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje y.

Solución: La región definida por las curvas dadas es

$$R = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; x^3 \leq y \leq 2x - x^2\right\}.$$

(a) El área de R es

$$\begin{aligned} a(R) &= \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^3\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

(b) El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje x, usando el método de los discos, es

$$\begin{aligned} V_x(R) &= \pi \int_0^1 \left[\left(2x - x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right] dx = \pi \int_0^1 \left(4x^2 + x^4 - 4x^3 - x^6\right) dx \\ &= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{5} - 1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \pi \left(\frac{35 + 21 - 15}{105}\right) = \frac{41}{105}\pi. \end{aligned}$$

(c) El volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje y, usando el método de las capas, es

$$\begin{aligned} V_y(R) &= 2\pi \int_0^1 x(2x - x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4)\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= 2\pi \left(\frac{40 - 15 - 12}{60}\right) = \frac{13}{30}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1.$$

(a) Obtener la serie de Maclaurin de f y su dominio de convergencia.

(b) Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$$

es convergente y calcular su suma integrando f en el intervalo $[0, 1]$.

Solución: (a) La derivada de la función f satisface

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{2}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \end{aligned}$$

donde $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Integrando $f'(t)$ entre 0 y x, obtenemos

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x t^{2n}\, dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Como $f(0) = 0$, tenemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

es la serie de Maclaurin de f en $(-1, 1)$, debido a su unicidad. Para estudiar la convergencia en los puntos terminales $x = -1$ y $x = 1$, consideramos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

que es divergente por el criterio de comparación por paso al límite con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. En el segundo punto, la serie es la opuesta de la anterior, por lo que también es divergente. Entonces, el dominio de convergencia es el intervalo abierto $(-1, 1)$.

(b) Para analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

usamos el criterio de comparación por paso al límite con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4},$$

concluimos que la serie es convergente. Integrando f en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt &= \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right) dt = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\, dt\right) \\ &= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.\end{aligned}$$

Entonces la suma s de la serie se obtiene integrando por partes la función f en el intervalo $[0,1]$. Es decir,

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\left[x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1-x^2}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log\left(1-x^2\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left[x\log(1+x) - x\log(1-x) + \log(1+x) + \log(1-x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left[(1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(2\log 2 + \lim_{x\to 1^-} (1-x)\log(1-x)\right) \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} (1-x) \\ &= \log 2. \end{aligned}$$