

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 1 de Junio de 2004

Ejercicio 1. Hallar los extremos absolutos de $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{xy}$ en el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solución: Para obtener los puntos críticos del interior de D , resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2xe^{xy} + (x^2y + y^3) e^{xy} = (2x + x^2y + y^3) e^{xy} = 0, \\ f_y(x, y) &= 2ye^{xy} + (x^3 + xy^2) e^{xy} = (2y + x^3 + xy^2) e^{xy} = 0. \end{aligned}$$

Dado que $e^{xy} > 0$, el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x + x^2y + y^3 &= 0, \\ 2y + x^3 + xy^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda, obtenemos

$$(x - y)(2 - x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x = y \text{ o bien } x^2 + y^2 = 2.$$

Los puntos solución de la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ pertenecen al exterior de D , por lo que necesariamente $x = y$. Entonces

$$0 = 2x + x^3 + x^3 = 2x(1 + x^2),$$

es una ecuación que tiene $x = 0$ como única solución real. En consecuencia, el único punto interior de D candidato a extremo es $P_1 = (0, 0)$.

La frontera de D se define con la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Usando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, determinamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, resolviendo

$$\begin{aligned} (2x + x^2y + y^3) e^{xy} &= 2\lambda x, \\ (2y + x^3 + xy^2) e^{xy} &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Usando la tercera ecuación, obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} 2x + x^2y + y^3 &= 2x + y(x^2 + y^2) = 2x + y, \\ 2y + x^3 + xy^2 &= 2y + x(x^2 + y^2) = 2y + x, \end{aligned}$$

que implican que las dos primeras ecuaciones del sistema son

$$\begin{aligned} (2x + y) e^{xy} &= 2\lambda x, \\ (2y + x) e^{xy} &= 2\lambda y. \end{aligned}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda, obtenemos

$$(x - y) e^{xy} = 2\lambda (x - y) \Rightarrow x = y \text{ o bien } e^{xy} = 2\lambda.$$

En el caso de que $x = y$, la tercera ecuación implica que $2x^2 = 1$, por lo que

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

son dos puntos de la frontera de D candidatos a extremos. Si $e^{xy} = 2\lambda$ entonces $2x + y = x$ implica $y = -x$, que con la tercera ecuación proporciona los puntos

$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Los valores de la función en dichos puntos son

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_2) = f(P_3) = e^{1/2}, \quad f(P_4) = f(P_5) = e^{-1/2}.$$

Entonces, el máximo absoluto se alcanza en P_2 y P_3 , mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1 .

Ejercicio 2. Sea C la cardioide de ecuación $r = a(1 + \cos \theta)$ orientada positivamente.

(a) Calcular la integral de línea

$$\oint_C \left[(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2 (x^2 + y^2 - 1) \right] ds,$$

usando el resultado para obtener la longitud de C .

(b) Calcular la integral de línea

$$\oint_C y dx - x dy,$$

y utilizarla para deducir el área de la región encerrada por C .

Solución: La cardioide C se parametriza mediante

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = a \cos \theta (1 + \cos \theta), \\ y &= r \sin \theta = a \sin \theta (1 + \cos \theta), \end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} dx &= -a [\sin \theta (1 + \cos \theta) + \cos \theta \sin \theta] d\theta, \\ dy &= a [\cos \theta (1 + \cos \theta) - \sin^2 \theta] d\theta. \end{aligned}$$

(a) Para calcular la integral de línea del campo escalar dado, evaluamos

$$x^2 + y^2 - ax = a^2 (1 + \cos \theta)^2 - a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta) = a^2 (1 + \cos \theta),$$

igualdad que implica

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2 (x^2 + y^2 - 1) = a^4 (1 + \cos \theta)^2 - a^2 [a^2 (1 + \cos \theta)^2 - 1] = a^2.$$

Además, tenemos que

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = a\sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta.$$

Entonces

$$\oint_C \left[(x^2 + y^2 - ax)^2 - a^2 (x^2 + y^2 - 1) \right] ds = \int_0^{2\pi} a^3 \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta.$$

Para calcular una primitiva, usamos

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \begin{cases} 2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -2 \cos \frac{\theta}{2} & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} a^3 \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta &= 2a^3 \left(\int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \int_\pi^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \right) \\ &= 2a^3 \left(\left[2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi - \left[2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]_\pi^{2\pi} \right) = 8a^3.\end{aligned}$$

La longitud de la cardioide dada es

$$l(C) = \oint_C ds = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = 8a.$$

(b) La integral de línea del campo vectorial dado es

$$\begin{aligned}\oint_C y dx - x dy &= \int_0^{2\pi} \left[-a^2 \operatorname{sen}^2 \theta (1 + \cos \theta)^2 - a^2 \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)^2 \right] d\theta \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = -a^2 \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= -a^2 \left[\frac{3\theta}{2} + 2 \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = -3\pi a^2.\end{aligned}$$

El área de la región encerrada por la cardioide es

$$a = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Ejercicio 3. Consideremos el sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq z \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V .

- (a) Calcular el área de la parte cilíndrica S_1 de la superficie S .
- (b) Calcular directamente el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

a través de la superficie cerrada S .

- (c) Calcular el flujo citado aplicando el teorema de la divergencia.

Solución: (a) La parte cilíndrica de la superficie S se define mediante

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq z \leq y, x^2 + y^2 = 4\}.$$

Usando coordenadas cilíndricas $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, obtenemos

$$S_1(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq 2 \sin \theta.$$

El producto vectorial fundamental es

$$(S_1)_\theta \times (S_1)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \sin \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0),$$

y tiene la norma $\|(S_1)_\theta \times (S_1)_z\| = \sqrt{4} = 2$. Entonces, el área

$$a(S_1) = \iint_{S_1} dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} 2 dz d\theta = \int_0^{\pi/2} 4 \sin \theta d\theta = [-4 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 4.$$

(b) Calculamos el flujo de salida del campo a través de las cuatro partes de S , que son la parte cilíndrica S_1 , la tapa superior S_2 , el triángulo lateral S_3 , y la base S_4 .

En el punto $S_1(0, 0) = (2, 0, 0)$, el producto $(S_1)_\theta \times (S_1)_z(0, 0) = (2, 0, 0)$, por lo que tiene la dirección exterior. El flujo de salida a través de S_1 es

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot N dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) \cdot (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) dz d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} 4 dz d\theta = \int_0^{\pi/2} 8 \sin \theta d\theta = [-8 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 8. \end{aligned}$$

La tapa superior S_2 verifica $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = y \geq 0$, y $x \geq 0$. Una parametrización es $S_2(x, y) = (x, y, y)$ donde $(x, y) \in D$, siendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calculamos el vector

$$(S_2)_x \times (S_2)_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1),$$

que tiene la dirección exterior al plano. El flujo de salida a través de S_2 es

$$\iint_{S_2} F \cdot N \, dS = \iint_D (x, y, y) \cdot (0, -1, 1) \, dx \, dy = 0.$$

El triángulo lateral S_3 está contenido en el plano $x = 0$ y verifica las desigualdades $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq y$. Parametrizamos $S_3(y, z) = (0, y, z)$, luego

$$(S_3)_y \times (S_3)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0),$$

que tiene la dirección interior al plano (cambiamos el signo). Entonces

$$\iint_{S_3} F \cdot N \, dS = - \int_0^2 \int_0^y (0, y, z) \cdot (1, 0, 0) \, dz \, dy = 0.$$

La base S_4 está contenido en $z = 0$, verificando $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, y $x \geq 0$. Una parametrización es $S_4(x, y) = (x, y, 0)$ donde $(x, y) \in D$. El producto vectorial fundamental es

$$(S_4)_x \times (S_4)_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1),$$

que tiene la dirección interior al plano (cambiamos el signo). Entonces

$$\iint_{S_4} F \cdot N \, dS = - \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy = 0.$$

En consecuencia, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\iint_S F \cdot N \, dS = 8.$$

(c) El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida del campo F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F* , es decir

$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Calculamos $\operatorname{div} F = 3$, y usando coordenadas cilíndricas

$$V = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq r \operatorname{sen} \theta \right\}.$$

Como el jacobiano del cambio de variables es r , la integral triple pedida verifica

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz &= 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{r \operatorname{sen} \theta} r \, dz \, dr \, d\theta = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 8 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \\ &= [-8 \cos \theta]_0^{\pi/2} = 8. \end{aligned}$$