

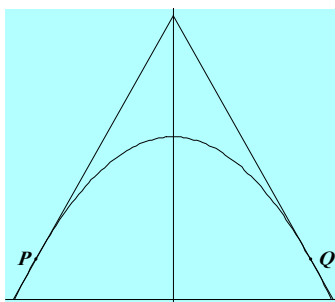
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen, 7 de Septiembre de 2004

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Calcular las coordenadas de los puntos P y Q de la parábola $y = 1 - x^2$, tales que el triángulo formado por el eje x y las rectas tangentes a la parábola en P y Q sea equilátero.



Solución. La pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$ en el punto (x, y) es $y' = -2x$, por lo que la ecuación de dicha recta tangente es $Y - y = -2x(X - x)$. El punto intersección de esta recta con el eje y tiene las siguientes coordenadas

$$X = 0, \quad Y = y + 2x^2 = 1 - x^2 + 2x^2 = 1 + x^2.$$

Las coordenadas del punto intersección de la recta tangente con el eje x son

$$Y = 0, \quad X = x + \frac{y}{2x} = \frac{2x^2 + 1 - x^2}{2x} = \frac{1 + x^2}{2x}, \quad x \neq 0.$$

Observemos que en el caso $x = 0$, la recta tangente es $Y = 1$, que no forma triángulo. Dado que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales a $\pi/3$, tenemos que

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{3} &= \frac{1 + x^2}{\frac{1 + x^2}{2x}} = 2x \quad \text{si } x > 0 \iff \sqrt{3} = 2x \quad \text{si } x > 0, \\ \tan \frac{\pi}{3} &= \frac{1 + x^2}{-\frac{1 + x^2}{2x}} = -2x \quad \text{si } x < 0 \iff \sqrt{3} = -2x \quad \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

Entonces las abscisas de los puntos P y Q son $-\sqrt{3}/2$ y $\sqrt{3}/2$. El valor de la ordenada es

$$y = 1 - \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Las coordenadas de los puntos son $P = (-\sqrt{3}/2, 1/4)$ y $Q = (\sqrt{3}/2, 1/4)$.

Ejercicio 2. Calcular el valor de la integral impropia

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx,$$

donde n es un entero positivo.

Solución. Usaremos la fórmula de integración por partes con $u = (\ln x)^n$ y $dv = dx$, obteniendo $du = n(\ln x)^{n-1} x^{-1} dx$ y $v = x$. Entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (\ln x)^n dx = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\ln x)^n dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} [x (\ln x)^n]_a^1 - n \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 (\ln x)^{n-1} dx \\ &= - \lim_{a \rightarrow 0} [a (\ln a)^n] - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Calculamos el límite usando la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} [a (\ln a)^n] &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\ln a)^n}{\frac{1}{a}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{n (\ln a)^{n-1} a^{-1}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{n (\ln a)^{n-1}}{-\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{n(n-1) (\ln a)^{n-2} a^{-1}}{(-1)^2 \frac{1}{a^2}} \\ &= (-1)^2 n(n-1) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\ln a)^{n-2}}{\frac{1}{a}}. \end{aligned}$$

Reiterando la aplicación de esta regla,

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\ln a)^n}{\frac{1}{a}} &= (-1)^{n-1} n! \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = (-1)^{n-1} n! \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} \\ &= (-1)^n n! \lim_{a \rightarrow 0} a = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$I_n = -n I_{n-1} = (-1)^2 n(n-1) I_{n-2} = \dots = (-1)^{n-1} n! I_1.$$

Finalmente, usando de nuevo integración por partes con $u = \ln x$ y $dv = dx$,

$$I_1 = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \rightarrow 0} [x \ln x]_a^1 - \int_0^1 dx = -1,$$

lo que implica que $I_n = (-1)^n n!$ para cualquier entero positivo n .

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen, 7 de Septiembre de 2004

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1 + t^4} dt,$$

en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solución. En primer lugar, obtenemos los puntos críticos del interior de D , resolviendo el sistema

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - \frac{2x}{1 + x^4} = \frac{2x^5 - 2x^3 - 2xy^2}{1 + x^2 + y^2 + x^4 + x^6 + x^4y^2} = 0,$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

La segunda ecuación implica $y = 0$, luego la primera implica $x^5 - x^3 = 0$ y obtenemos

$$x^3(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \text{ o bien } x = \pm 1.$$

Entonces, los puntos interiores de D candidatos a extremos son

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (-1, 0).$$

La frontera de D se define con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Aplicando el criterio de los multiplicadores de Lagrange, calculamos los puntos solución del sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, resolviendo

$$\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} - \frac{2x}{1 + x^4} = 2\lambda x,$$

$$\frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = 2\lambda y,$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Si $x = 0$, la tercera ecuación implica que $y^2 = 4$, por lo que $P_4 = (0, 2)$ y $P_5 = (0, -2)$ son dos puntos de la frontera de D candidatos a extremos. En el caso $x \neq 0$, hay dos posibilidades. La primera es que $y = 0$, luego $x^2 = 4$, obteniendo $P_6 = (2, 0)$ y $P_7 = (-2, 0)$. La segunda es que $y \neq 0$, por lo que

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + x^4} = \lambda,$$

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \lambda.$$

Ambas ecuaciones implican $-\frac{1}{1+x^4} = 0$, que es una contradicción, luego no existen soluciones con ambas coordenadas no nulas.

Los valores de la función en los puntos obtenidos son

$$f(P_1) = \ln(1) = 0,$$

$$f(P_2) = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2t}{1+t^4} dt = \ln(2) - [\arctan t^2]_0^1 = \ln(2) - \frac{\pi}{4} = -0.09225,$$

$$\begin{aligned} f(P_3) &= \ln(2) - \int_0^{-1} \frac{2t}{1+t^4} dt = \ln(2) + \int_{-1}^0 \frac{2t}{1+t^4} dt \\ &= \ln(2) + [\arctan t^2]_{-1}^0 = \ln(2) - \frac{\pi}{4} = -0.09225, \end{aligned}$$

$$f(P_4) = f(P_5) = \ln(5) = 1.6094,$$

$$f(P_6) = f(P_7) = \ln(5) - \arctan 4 = 0.28362.$$

Entonces, el mínimo absoluto se alcanza en P_2 y P_3 , y el máximo absoluto en P_4 y P_5 .

Ejercicio 4. Sea V el sólido definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 4, x \leq 6\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V . Calcular, directamente y mediante el teorema de Gauss, el flujo de salida a través de S del campo vectorial $F(x, y, z) = (xe^z, ye^z, e^z)$.

Solución. Calculamos el flujo de salida del campo a través de las cinco partes de S , que son los triángulos S_1 (contenido en el plano $x = 0$) y S_2 (contenido en el plano $x = 6$), los rectángulos S_3 (contenido en el plano $y = 0$) y S_4 (contenido en el plano $z = 0$), y la tapa superior S_5 (contenida en el plano $y + z = 4$).

Parametrizamos S_1 mediante $S_1(y, z) = (0, y, z)$, donde $y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 4$. La normal exterior es $(-1, 0, 0)$ y el flujo de salida a través de S_1 es

$$\iint_{S_1} F \cdot N \, dS = \int_0^4 \int_0^{4-y} (0, ye^z, e^z) \cdot (-1, 0, 0) \, dz \, dy = 0.$$

Una parametrización del triángulo S_2 es $S_2(y, z) = (6, y, z)$ donde $y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq 4$. El flujo de salida a través de S_2 es

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot N \, dS &= \int_0^4 \int_0^{4-y} (6e^z, ye^z, e^z) \cdot (1, 0, 0) \, dz \, dy \\ &= \int_0^4 \int_0^{4-y} 6e^z \, dz \, dy = 6 \int_0^4 (e^{4-y} - 1) \, dy \\ &= 6 [-e^{4-y} - y]_0^4 = 6(-1 - 4 + e^4) = 6e^4 - 30. \end{aligned}$$

El rectángulo S_3 se parametriza con $S_3(x, z) = (x, 0, z)$, donde $0 \leq x \leq 6, 0 \leq z \leq 4$ y la normal exterior es $(0, -1, 0)$. El flujo de salida a través de S_3 es

$$\iint_{S_3} F \cdot N \, dS = \int_0^6 \int_0^4 (xe^z, 0, e^z) \cdot (0, -1, 0) \, dz \, dx = 0.$$

El rectángulo S_4 se parametriza con $S_4(x, y) = (x, y, 0)$, donde $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4$ y la normal exterior es $(0, 0, -1)$. El flujo de salida a través de S_4 es

$$\iint_{S_4} F \cdot N \, dS = \int_0^6 \int_0^4 (x, y, 1) \cdot (0, 0, -1) \, dy \, dx = - \int_0^6 \int_0^4 dy \, dx = -24.$$

La tapa superior S_5 está contenida en el plano $y + z = 4$, siendo $y \geq 0, z \geq 0, 0 \leq x \leq 6$. Por tanto $y = 4 - z \geq 0$ lo que implica $0 \leq z \leq 4$. Una

parametrización de S_5 es $S_5(x, z) = (x, 4 - z, z)$, donde $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq z \leq 4$ y el producto vectorial fundamental es

$$(S_5)_x \times (S_5)_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

que tiene la dirección interior al sólido (cambiamos el signo). Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_5} F \cdot N \, dS &= \int_0^6 \int_0^4 (xe^z, (4-z)e^z, e^z) \cdot (0, 1, 1) \, dx \, dz \\ &= \int_0^6 \int_0^4 (5-z)e^z \, dx \, dz \\ &= \int_0^6 \left(5[e^z]_0^4 - [ze^z]_0^4 + [e^z]_0^4 \right) dx \\ &= \int_0^6 (2e^4 - 6) \, dx = 12e^4 - 36, \end{aligned}$$

usando la fórmula de integración por partes.

En consecuencia, el flujo de salida del campo F a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N \, dS &= 6e^4 - 30 - 24 + 12e^4 - 36 \\ &= 18e^4 - 90 = 18(e^4 - 5). \end{aligned}$$

El teorema de Gauss afirma que *el flujo de salida del campo F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F* , es decir

$$\iint_S F \cdot N \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Calculamos $\operatorname{div} F = 3e^z$, y el valor de la integral triple es

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz &= 3 \int_0^6 \int_0^4 \int_0^{4-y} e^z \, dz \, dy \, dx \\ &= 3 \int_0^6 \int_0^4 (e^{4-y} - 1) \, dy \, dx \\ &= 3 \int_0^6 [-e^{4-y} - y]_0^4 \, dx \\ &= 3 \int_0^6 (-1 - 4 + e^4) \, dx \\ &= 18(e^4 - 5). \end{aligned}$$