CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2005

Primera parte

Ejercicio 1. Encontrar el área mínima de la región del primer cuadrante del plano cuyas fronteras están contenidas en la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y las rectas $x=0$, $y=0$.

Solución. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ es $y-5=m\,(x-3)$. Si la pendiente $m<0$, entonces esta recta y los ejes $x=0$, $y=0$ determinan un triángulo situado en el primer cuadrante del plano. En el caso $m>0$, las regiones que determinan las tres rectas no pertenecen al primer cuadrante o degeneran en un punto. Los casos especiales dados por las rectas $x=3$, $y=5$, son regiones con área infinita. En consecuencia, la pendiente satisface la condición $m<0$.

Para calcular el área del triángulo es suficiente obtener las coordenadas de los puntos intersección de la recta que pasa por el punto $(3,5)$ y las rectas $x=0$, $y=0$. Para obtener la coordenada y del primer punto, resolvemos $y-5=-3m$, obteniendo $y=5-3m$. La coordenada x del segundo punto viene dada por

$$-5=m\,(x-3)\Rightarrow x-3=-\frac{5}{m}\Rightarrow x=3-\frac{5}{m}=\frac{3m-5}{m}.$$

Entonces, el área del triángulo es

$$A\,(m)=\frac{1}{2}\,(5-3m)\left(\frac{3m-5}{m}\right)=-\frac{1}{2}\frac{(5-3m)^2}{m},\quad m<0.$$

A continuación, calculamos los puntos críticos mediante

$$\begin{aligned}A'\,(m)&=-\frac{1}{2}\left[\frac{2\,(5-3m)\,(-3)\,m-(5-3m)^2}{m^2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{(5-3m)\,(5+3m)}{m^2}\right]=0.\end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son $m_1=5/3>0$ y $m_2=-5/3<0$, siendo m_2 la única solución que pertenece al dominio de definición del área $A\,(m)$.

Para probar que $A\,(m)$ alcanza su valor mínimo en $m_2=-5/3$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $m<-5/3$ entonces $5+3m<0$ y $5-3m>0$ porque $m<0$. Por tanto $A'\,(m)<0$ y el área es decreciente a la izquierda de $-5/3$. Si $m>-5/3$ entonces $5+3m>0$ y $5-3m>0$ porque $m<0$. Por tanto $A'\,(m)>0$ y el área es creciente a la derecha de $-5/3$. Así concluimos que el área mímima es

$$A\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{2}\frac{(5+5)^2}{(-5/3)}=30.$$

Ejercicio 2.

(a) Aproximar el valor de la integral $\int_1^2 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$, mediante la regla de Simpson dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales.

(b) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución. (a) Si dividimos el intervalo $[1,2]$ en $n=4$ subintervalos con la misma longitud $h=0.25$, los puntos terminales de los subintervalos son $x_0=1$, $x_1=1.25$, $x_2=1.5$, $x_3=1.75$, $x_4=2$. Entonces, la regla de Simpson es

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left[f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(2)\right].$$

En consecuencia, la aproximación del valor de la integral es

$$\int_1^2 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx \approx 3.321702011.$$

(b) En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1=\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Para ello, usamos el criterio de comparación por paso al límite, calculando

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^p}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+p}}{x-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+p}}{\dfrac{x^3}{3!}}=6,$$

si $\alpha+p=3 \Leftrightarrow p=3-\alpha$. Dado que la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si y sólo si $p<1$, tenemos que la integral I_1 es convergente si y sólo si $3-\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha>2$.

El criterio de comparación también nos servirá para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2=\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Calculamos

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\dfrac{x^\alpha}{x-\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{x^p}}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^{\alpha+p}}{x-\operatorname{sen} x}=1,$$

si $\alpha+p=1 \Leftrightarrow p=1-\alpha$. Dado que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si y sólo si $p>1$, tenemos que la integral I_2 es convergente si y sólo si $1-\alpha>1 \Leftrightarrow \alpha<0$. Como los intervalos de convergencia para las integrales I_1 y I_2 no tienen puntos comunes, concluimos que no existen valores de α tales que la integral sea convergente.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2005

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Obtener los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8,$$

en el conjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Solución. En primer lugar, obtenemos los puntos del interior de M, tales que $\nabla f(x,y) = (0,0)$, resolviendo el sistema

$$\left(2xy + 4x, 3y^2 + x^2 + 4y - 4\right) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x(y+2) = 0, \\ 3y^2 + x^2 + 4y - 4 = 0. \end{cases}$$

La primera ecuación implica $x = 0$ o bien $y = -2$. Si $y = -2$, la segunda ecuación implica que $x = 0$, pero el punto $(0,-2)$ no pertenece al interior de M. Si $x = 0$, la segunda ecuación es $3y^2 + 4y - 4 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2/3, \\ -2. \end{cases}$$

Las coordenadas del punto $P_1 = (0, 2/3)$ verifican $4/9 < 1$, por lo que pertenece al interior de M. La frontera de M es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Usando la ecuación de los multiplicadores de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$, con la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} 2x(y+2) = \lambda 2x, \\ 3y^2 + x^2 + 4y - 4 = \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, entonces $y + 2 = \lambda$, lo que implica que

$$3y^2 + x^2 + 4y - 4 = 2y(y+2) = 2y^2 + 4y \Longleftrightarrow y^2 + x^2 = 4,$$

que contradice la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Entonces $x = 0$, luego $y^2 = 1$, lo que implica que $y = \pm 1$. Por tanto, los puntos $P_2 = (0,1)$ y $P_3 = (0,-1)$ satisfacen las ecuaciones primera y tercera. Para comprobar que también se cumple la segunda ecuación, sustituimos $(x,y) = (0,1)$ y $(x,y) = (0,-1)$ obteniendo $\lambda = 3/2$ y $\lambda = 5/2$, respectivamente.

Los valores de la función en los tres puntos obtenidos son

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f((0,2/3)) = \frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - 8 = -\frac{256}{27} \approx -9.48148, \\ f(P_2) &= f(0,1) = 1 + 2 - 4 - 8 = -9, \\ f(P_3) &= f(0,-1) = -1 + 2 + 4 - 8 = -3. \end{aligned}$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_3, mientras que el mínimo absoluto se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea

$$\oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz,$$

donde C es la curva dada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & z \geq 0, \\ x^2+y^2=y. \end{cases}$$

Solución. Para calcular directamente la integral de línea, parametrizamos la curva C usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$. Entonces, las ecuaciones de las superficies que definen la curva C son

$$\begin{cases} z = \sqrt{1-r^2}, \\ r = \operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

donde $0 \leq \theta \leq \pi$, y la ecuación de la curva es

$$C(\theta) = \left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \operatorname{sen}^2\theta, \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

siendo su orientación anti-horaria. Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\cos 2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta - \left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)^2\right] d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta - 2\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\right] d\theta \\
&= \left[-\frac{\cos 4\theta}{16} + \frac{\operatorname{sen}^4\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}^6\theta}{3} - \frac{\theta}{8} + \frac{\operatorname{sen}4\theta}{32}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\,dS,$$

donde S es la porción de la superficie de la semiesfera cuya frontera es la curva C. Una parametrización de S viene dada por

$$S(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2}\right), \quad 0 \leq r \leq \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Para aplicarlo, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x & yz^2 & xz \end{vmatrix} = (-2yz, -z, 0),$$

por lo que $\operatorname{rot} F(S(r,\theta)) = \left(-2r \operatorname{sen}\theta\sqrt{1-r^2}, -\sqrt{1-r^2}, 0\right)$. A continuación, calculamos el producto vectorial fundamental

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \dfrac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}, r\right),$$

por lo que la orientación de la superficie S es compatible con la orientación de su frontera C. Obtenemos el producto escalar

$$\operatorname{rot} F(S(r,\theta)) \cdot (S_r \times S_\theta) = -2r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\operatorname{sen}\theta,$$

para calcular la integral de superficie

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS &= \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \left(-2r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta - r^2\operatorname{sen}\theta\right) dr\, d\theta \\
&= -\int_0^\pi \left[\frac{r^4}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta \\
&= -\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^4\theta\right) d\theta \\
&= -\left[\frac{\operatorname{sen}^6\theta}{12}\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4\theta &= \left(\operatorname{sen}^2\theta\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS &= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{3\theta}{8} - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{8}\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$