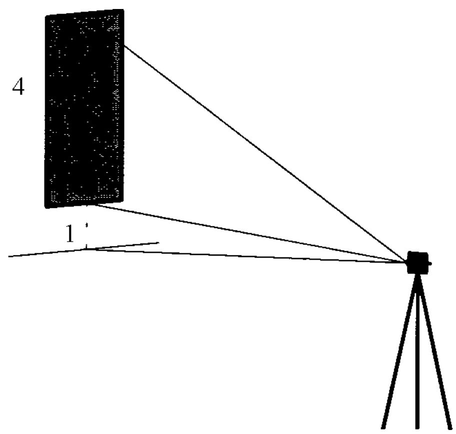
**CÁLCULO**

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

*Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2004*

**Ejercicio 1.** Se desea fotografiar un cuadro de 4 m. de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está situada 1 m. por debajo del extremo inferior del cuadro. ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse la cámara para que el ángulo que subtiende (o abarca) el cuadro sea máximo?




---

**Solución:** Sea $x$ la distancia entre la pared y la lente de la cámara. Consideramos el ángulo $\alpha$ que subtiende el cuadro, y el ángulo $\beta$ que subtiende el metro de pared situada por debajo del extremo inferior del cuadro. Entonces,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{5}{x}, \quad \tan(\beta) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Aplicando la función inversa obtenemos la función objetivo

$$\alpha(x) = \arctan\frac{5}{x} - \arctan\frac{1}{x}, \quad x \in (0,\infty).$$

Para obtener los puntos críticos, resolvemos la ecuación

$$\alpha'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2}\left(\frac{-5}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-5}{x^2+25} + \frac{1}{x^2+1}$$
$$= \frac{-5x^2-5+x^2+25}{(x^2+25)(x^2+1)} = \frac{20-4x^2}{(x^2+25)(x^2+1)} = 0.$$

Dado que $x \in (0, \infty)$, la única solución de esta ecuación es el punto crítico

$$4x^2 = 20 \Longleftrightarrow x = \sqrt{5}.$$

Observemos que si $x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$ entonces $20 - 4x^2 > 0$ y $\alpha'(x) > 0$. Además, si $x \in \left(\sqrt{5}, \infty\right)$ entonces $20 - 4x^2 < 0$ y $\alpha'(x) < 0$. En consecuencia, el ángulo máximo que subtiende el cuadro se obtiene colocando la cámara a una distancia de $\sqrt{5}$ metros.

**Ejercicio 2.** Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen al hacer girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$, en torno al eje $x$, al eje $y$, y a la recta $y = 2$.

---

**Solución:** Las curvas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$, por lo que la región limitada por dichas curvas es

$$R = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \ \ x^2 \leq y \leq x\right\}.$$

El volumen del sólido generado al girar $R$ alrededor del eje $x$, usando el método de las arandelas, es

$$V_1(R) = \pi \int_0^1 \left(x^2 - x^4\right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

El volumen del sólido generado al girar $R$ alrededor del eje $y$, usando el método de las capas, es

$$\begin{aligned} V_2(R) &= 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

El volumen del sólido generado al girar $R$ alrededor de la recta $y = 2$, usando el método de las arandelas, es

$$\begin{aligned} V_3(R) &= \pi \int_0^1 \left[(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2\right] dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[(4 + x^4 - 4x^2) - \left(4 + x^2 - 4x\right)\right] dx \\ &= \pi \int_0^1 \left[(x^4 - 5x^2 + 4x\right] dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2\right]_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2\right) = \pi \left(\frac{3 - 25 + 30}{15}\right) = \frac{8\pi}{15}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** Definir el polinomio de Taylor y el resto de Lagrange de grado $n$ de una función $f$ en un punto $a$. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x)=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3},\quad x\neq 0.$$

(a) Calcular $f(0)$.

(b) Obtener el polinomio de Maclaurin de $f$ de grado 4.

(c) Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el error cometido.

---

**Solución:** (a) Usando el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

deducimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\dfrac{x^3}{3!}}=1.$$

La función $f$ es continua en $x=0$, por lo que

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(b) El polinomio de Maclaurin de la función $f$ de grado 4 es

$$P_4(x)=\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}\right)}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}.$$

(c) La aproximación pedida es

$$f(1)\approx P_4(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}=0.15853175.$$

Para estimar el error cometido, observamos que

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{\operatorname{sen}z}{8!}x^8\right)}{x^3}\\&=P_4(x)-\frac{\operatorname{sen}z}{8!}x^5=P_4(x)+R_4(x),\end{aligned}$$

donde $z$ está comprendido entre 0 y $x$. Para el valor $x = 1$, obtenemos la estimación del error

$$|R_4(1)| = \frac{|\operatorname{sen} z|}{8!} \leq \frac{1}{8!} = 2.480 \times 10^{-5}.$$

La evaluación numérica de la función en $x = 1$ es

$$f(1) = 1 - \sin 1 = 0.15852902.$$