

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2005

Ejercicio 1. Demostrar que la curvatura K de la curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$ es

$$K = \frac{|2(r')^2 - r r'' + r^2|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}.$$

Calcular la curvatura de la curva $r = a \operatorname{sen} \theta$.

Solución: Las ecuaciones paramétricas de la curva en \mathbb{R}^3 son

$$R(\theta) = (x(\theta), y(\theta), 0) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \operatorname{sen} \theta, 0).$$

La curvatura de $R(\theta)$ es

$$K = \frac{\|R'(\theta) \times R''(\theta)\|}{\|R'(\theta)\|^3}.$$

Dado que el producto vectorial

$$R'(\theta) \times R''(\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'(\theta) & y'(\theta) & 0 \\ x''(\theta) & y''(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x'(\theta) y''(\theta) - x''(\theta) y'(\theta)),$$

obtenemos la siguiente fórmula para calcular la curvatura

$$K = \frac{|x'(\theta) y''(\theta) - x''(\theta) y'(\theta)|}{[(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2]^{3/2}}.$$

A continuación, calculamos

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= r' \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta, & y'(\theta) &= r' \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta, \\ x''(\theta) &= r'' \cos \theta - 2r' \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta, & y''(\theta) &= r'' \operatorname{sen} \theta + 2r' \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Entonces, las igualdades

$$\begin{aligned} |x'(\theta) y''(\theta) - x''(\theta) y'(\theta)| &= |2(r')^2 - r r'' + r^2|, \\ (x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= (r')^2 + r^2, \end{aligned}$$

implican la fórmula pedida. Para calcular la curvatura de la curva $r = a \operatorname{sen} \theta$, observemos que $r' = a \cos \theta$ y $r'' = -a \operatorname{sen} \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned} |2(r')^2 - r r'' + r^2| &= |2a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 \operatorname{sen}^2 \theta| = 2a^2, \\ [(r')^2 + r^2]^{3/2} &= [a^2]^{3/2} = a^3, \\ K &= \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Hallar los puntos de la elipse

$$\begin{aligned}2x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\ x + y + z &= 0,\end{aligned}$$

más cercanos y más lejanos al eje OY .

Solución: La distancia de un punto cualquiera $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ al eje OY es $\sqrt{x^2 + z^2}$. Entonces, para encontrar los puntos de la elipse más cercanos y más lejanos al eje OY , usamos la función objetivo $f(x, y, z) = x^2 + z^2$. Aplicando el teorema de los multiplicadores de Lagrange, con las dos restricciones que definen la elipse, obtenemos

$$\begin{aligned}2x &= 4\lambda x + \mu, \\ 0 &= 2\lambda y + \mu, \\ 2z &= \mu, \\ 2x^2 + y^2 &= 4, \\ x + y + z &= 0.\end{aligned}$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la primera y segunda, y simplificando, el sistema es

$$\begin{aligned}x &= 2\lambda x + z, \\ 0 &= \lambda y + z, \\ 2x^2 + y^2 &= 4, \\ x + y + z &= 0.\end{aligned}$$

Si $y = 0$, la segunda ecuación implica que $z = 0$, y usando la cuarta concluimos que $x = 0$, lo que contradice la tercera ecuación. Entonces $y \neq 0$, por lo que $\lambda = -z/y$, siendo $x = -2xz/y + z$, lo que implica $xy = -2xz + yz$. Dado que $z = -x - y$, obtenemos

$$xy = 2x(x + y) - y(x + y) = 2x^2 + xy - y^2 \iff 2x^2 - y^2 = 0.$$

Las ecuaciones $2x^2 + y^2 = 4$, $2x^2 - y^2 = 0$, implican que $x^2 = 1$, $y^2 = 2$. Teniendo en cuenta que $z = -x - y$, los cuatro puntos solución del sistema son

$$\begin{aligned}P_1 &= (1, \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), & P_2 &= (1, -\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), \\ P_3 &= (-1, \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), & P_4 &= (-1, -\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Los valores de la función objetivo $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ en dichos puntos son

$$f(P_1) = f(P_4) = 4 + 2\sqrt{2}, \quad f(P_2) = f(P_3) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Entonces, los puntos más cercanos son P_2 y P_3 , mientras que los más lejanos son P_1 y P_4 .

Ejercicio 3. Consideremos la superficie S definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0,$$

orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (-y, yz^2, x^2z).$$

Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

Solución: En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & yz^2 & x^2z \end{vmatrix} = (-2yz, -2xz, 1).$$

Dado que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, parametrizamos la superficie S mediante

$$S(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right), \quad (x, y) \in D,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right),$$

y tiene la orientación exterior a la esfera porque $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS &= \iint_D \operatorname{rot} F(S(x, y)) \cdot S_x \times S_y \, dx \, dy = \iint_D (1 - 4xy) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (1 - 4r^2 \sin \theta \cos \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \sin \theta \cos \theta \right]_0^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 8 \sin 2\theta) \, d\theta = [2\theta + 4 \cos 2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi, \end{aligned}$$

usando el cambio de variables a coordenadas polares.

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde la curva C , que es la frontera de S , viene dada por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$. Una parametrización de la curva con orientación inducida por la superficie orientada por la normal exterior a la esfera es

$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, 0, 0) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = 4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = 2 \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie S^* definida por $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$. Entonces, la superficie $S \cup S^*$ es la frontera de la semiesfera V , donde la orientación de S^* viene dada por la normal exterior a la semiesfera. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup S^*} \text{rot } F \cdot N \, dS = \iiint_V \text{div}(\text{rot } F) \, dx \, dy \, dz = 0,$$

porque $\text{div}(\text{rot } F)(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS = - \iint_{S^*} \text{rot } F \cdot N \, dS.$$

Parametrizamos la superficie S^* mediante

$$S^*(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0), \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$S_r^* \times S_\theta^* = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

está orientado hacia el interior de V , por lo que debemos integrar

$$-\text{rot } F(S^*(r, \theta)) \cdot S_r^* \times S_\theta^* = -(0, 0, 1) \cdot (0, 0, r) = -r.$$

El flujo exterior, a través de S^* , del rotacional del campo F es

$$\iint_{S^*} \text{rot } F \cdot N \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r \, dr \, d\theta = -2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = -4\pi,$$

lo que implica el resultado pedido.