

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 7 de Julio de 2006

PRIMERA PARTE

**Ejercicio 1.** Determinar el máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Solución.** En primer lugar, observemos que la función  $f$  satisface

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{3-x} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1} & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

En el intervalo  $(-\infty, 0)$ , la derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} > 0,$$

luego  $f$  es creciente en  $(-\infty, 0]$ , lo que implica  $f(x) \leq f(0) = 4/3$  para todo  $x \in (-\infty, 0]$ . En el intervalo  $(0, 2)$ , la derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-(x^2 - 6x + 9) + x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2(3-x)^2} \\ &= \frac{8x - 8}{(1+x)^2(3-x)^2}, \end{aligned}$$

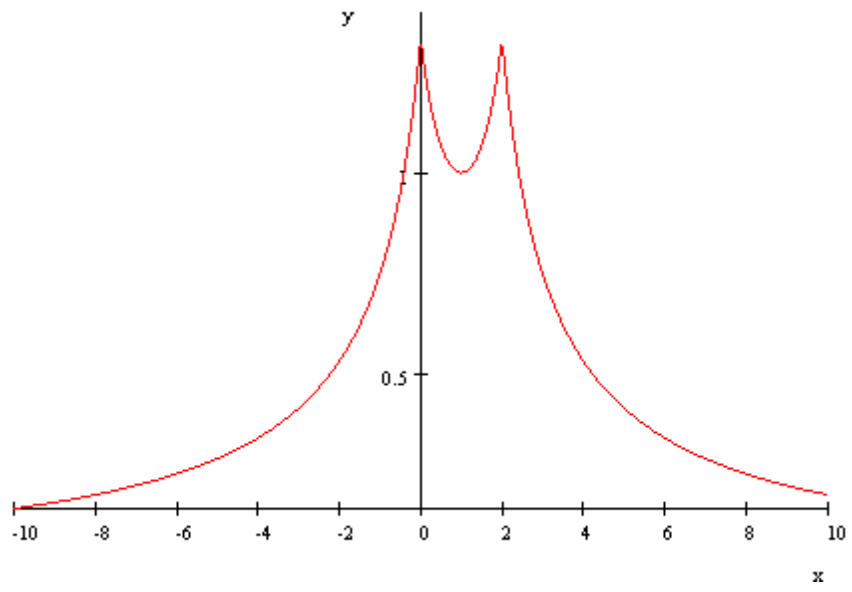
lo que implica que  $f$  es decreciente en  $[0, 1]$  y creciente en  $[1, 2]$ . Entonces

$$f(x) \leq \max\{f(0), f(2)\} = \frac{4}{3} \text{ para todo } x \in [0, 2].$$

Finalmente, en el intervalo  $(2, \infty)$ , la derivada es

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0,$$

luego  $f$  es decreciente en  $[2, \infty)$  y  $f(x) \leq f(2) = 4/3$  para todo  $x \in [2, \infty)$ . En consecuencia, el máximo absoluto de  $f$  en  $\mathbb{R}$  es  $f(0) = f(2) = 4/3$ .



Gráfica de la función  $f$

## Ejercicio 2.

(a) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

(b) Calcular el valor de la integral impropia  $I$  usando la sustitución  $u = 1/x$ .

---

### Solución.

(a) En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Para aplicar el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

si  $\alpha < 0$ . Dado que la integral  $\int_0^1 x^\alpha dx$  converge si y sólo si  $\alpha > -1$ , usando  $\alpha \in (-1, 0)$ , obtenemos que la integral  $I_1$  es convergente. Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx,$$

calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1} + (\alpha+2)x^{\alpha+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha + (\alpha+2)x^{\alpha+2}} = 0, \end{aligned}$$

si  $\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -2$ . Dado que la integral  $\int_1^{\infty} x^\alpha dx$  converge si y sólo si  $\alpha < -1$ , usando  $\alpha \in (-2, -1)$ , obtenemos que la integral  $I_2$  es convergente. Como ambas integrales son convergentes, concluimos que la integral  $I$  es convergente.

(b) La sustitución  $u = 1/x$  implica  $x = 1/u$ ,  $\ln x = -\ln u$ ,  $dx = -u^{-2} du$ , por lo que

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^{\infty} \frac{-\ln u}{1+(1/u)^2} \frac{du}{(-u^2)} = - \int_0^{\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du = -I.$$

Entonces  $2I = 0$ , luego el valor de la integral impropia  $I = 0$ .

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 7 de Julio de 2006

SEGUNDA PARTE

**Ejercicio 3.** Sea  $R$  la región acotada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Utilizar el cambio de variables  $x = u^{1/3}v^{2/3}$ ,  $y = u^{2/3}v^{1/3}$  para hallar el área de la región  $R$ .

---

**Solución.** La región  $R$  es

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3y} \leq x \leq \sqrt{4y}, \quad \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x} \right\}.$$

El cambio de variables dado implica

$$\frac{x^2}{y} = \frac{u^{2/3}v^{4/3}}{u^{2/3}v^{1/3}} = v, \quad \frac{y^2}{x} = \frac{u^{4/3}v^{2/3}}{u^{1/3}v^{2/3}} = u.$$

Además, observemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{3y} \leq x \leq \sqrt{4y} &\iff 3 \leq \frac{x^2}{y} \leq 4, \\ \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x} &\iff 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2. \end{aligned}$$

Entonces la región  $S$  en el plano  $uv$  es

$$S = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, \quad 3 \leq v \leq 4 \right\}.$$

A continuación, calculamos el jacobiano

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Usando el teorema del cambio de variables, calculamos el área de la región  $R$ ,

$$a(R) = \iint_R dx dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3}.$$

**Ejercicio 4.** Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z),$$

sobre la superficie dada por los puntos del paraboloide  $z = 2 - x^2 - y^2$  tales que  $z \geq 1$ .

---

**Solución.** La superficie dada es

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si consideramos el sólido  $Q$  cuyas fronteras son  $S$  y la superficie  $T$ , definida por  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$ , el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} F \cdot N \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Calculamos

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = 0$$

En consecuencia,

$$\iint_S F \cdot N \, dS = - \iint_T F \cdot N \, dS.$$

Parametrizamos la superficie  $T$  mediante

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

está orientado hacia el interior de  $Q$ , por lo que debemos integrar

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} F(T(r, \theta)) \cdot T_r \times T_\theta &= -\frac{1}{(r^2 + 1)^{3/2}} (r \cos \theta, r \sin \theta, 1) \cdot (0, 0, r) \\ &= \frac{-r}{(r^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces, el flujo exterior del campo  $F$  sobre la superficie  $S$  es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N \, dS &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{-r}{(r^2 + 1)^{3/2}} \, d\theta \, dr = 2\pi \left[ \frac{-1}{(r^2 + 1)^{1/2}} \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$