CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 22 de Junio de 2006

Ejercicio 1.
Hallar los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x - y - z$, sobre el conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 1 = 0,\ \ 3x - 4z = 0\right\}.$$

Solución: Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función $f(x,y,z) = x - y - z$, resolviendo el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$ y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \\ h(x,y,z) &= 3x - 4z = 0. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x + 3\mu, \\ -1 &= 4\lambda y, \\ -1 &= -4\mu. \end{aligned}$$

La tercera ecuación implica $\mu = 1/4$, por lo que las dos primeras son

$$1/4 = 2\lambda x, \quad 1/4 = -\lambda y,$$

luego $2\lambda x = -\lambda y$. Dado que $\lambda \neq 0$, obtenemos $2x = -y$. Sustituyendo en la primera restricción

$$x^2 + 8x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow y = \mp\frac{2}{3}.$$

La segunda restricción, $z = \dfrac{3x}{4}$ nos proporciona los extremos absolutos

$$A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \quad B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right).$$

Dado que

$$f(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad f(B) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4},$$

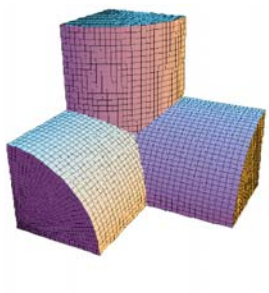
la función tiene un máximo absoluto en A y un mínimo absoluto en B.

Ejercicio 2.

(a) Evaluar las integrales $\displaystyle\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy$, $\displaystyle\iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$, donde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le x\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ 0\le x\le y\right\}. \end{aligned}$$

(b) Calcular el volumen del sólido dado por la intersección de los tres cilindros sólidos $x^2+y^2\le 1$, $x^2+z^2\le 1$, $y^2+z^2\le 1$, situado en el octante positivo $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. *Indicación: aplicar los resultados obtenidos en (a).*



Solución: (a) Usando coordenadas polares, calculamos la integral

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\int_0^1 \sqrt{1-r^2\cos^2\theta}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2\cos^2\theta}\right)\left[\left(1-r^2\cos^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2}-1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\operatorname{sen}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}+\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right) = \frac{1}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2\operatorname{sen}^2\theta}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\left[\left(1-r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}-1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos^3\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos\theta\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}+\cos\theta\right)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\left[-\operatorname{cotg}\theta+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+\operatorname{sen}\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{3}\left(2+1-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

(b) Los puntos del sólido U satisfacen $x^2+y^2\le 1$, $z^2\le 1-x^2$, $z^2\le 1-y^2$, en el octante positivo y su descripción como sólido XY-proyectable es

$$
U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+ : x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le z\le \min\left\{\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-y^2}\right\}\right\}.
$$

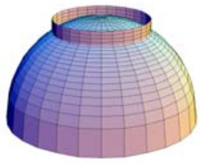
Considerando los dominios D_1 y D_2 del apartado (a), observemos que

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in D_1 &\Rightarrow 0\le y\le x\Rightarrow y^2\le x^2\Rightarrow \sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1-y^2}\Rightarrow z\le\sqrt{1-x^2},\\
(x,y)\in D_2 &\Rightarrow 0\le x\le y\Rightarrow x^2\le y^2\Rightarrow \sqrt{1-y^2}\le\sqrt{1-x^2}\Rightarrow z\le\sqrt{1-y^2}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, el volumen del sólido U es

$$
\begin{aligned}
V=\iiint\limits_U dx\,dy\,dz &= \iint\limits_{D_1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy=2-\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.
Sea S la porción de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geq 0$, que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$. Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=(xy,yz,zx)$, calcular el flujo exterior del campo $\operatorname{rot}(F)$ a través de S, directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.



Solución: El rotacional del campo vectorial F es

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ xy & yz & zx \end{vmatrix} = (-y,-z,-x)\,.$$

Los puntos de la semiesfera situados en el interior del cilindro verifican $0 \leq x^2+y^2 = 4-z^2 \leq 1$, luego $3 \leq z^2 \leq 4$, lo que implica $\sqrt{3} \leq z \leq 2$. Por tanto, la superficie $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ \sqrt{3} \leq z \leq 2\right\}$ y elegimos la parametrización dada por las coordenadas cilíndricas

$$S(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{4-r^2}\right), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \dfrac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right),$$

y tiene la orientación exterior a la semiesfera porque en el punto $S(1,0) = \left(1,0,\sqrt{3}\right)$, el producto vectorial $S_r \times S_\theta(1,0) = \left(1/\sqrt{3},0,1\right)$. A continuación, calculamos

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F\left(S(r,\theta)\right) \cdot S_r \times S_\theta &= \left(-r\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{4-r^2}, -r\cos\theta\right) \cdot \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right) \\ &= -\left(\frac{r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}} + r^2\operatorname{sen}\theta + r^2\cos\theta\right).\end{aligned}$$

El flujo exterior del campo $\operatorname{rot} F$ a través de S es

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}} + r^2\operatorname{sen}\theta + r^2\cos\theta\right) d\theta\, dr \\ &= -\int_0^1 \left(\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} + r^2\left[-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}\right) dr \\ &= 0.\end{aligned}$$

El teorema de Stokes asegura que $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \oint_C F \cdot dr$, donde la curva C, que es la frontera de S, viene dada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Una parametrización de la curva con orientación inducida por la superficie orientada por la normal exterior a la semiesfera es

$$r(\theta) = S(1, \theta) = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}
\oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta \\
&= \left[-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + \frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Para aplicar el teorema de Gauss, consideramos el sólido U cuyas fronteras son S y la superficie T definida por $x^2 + y^2 \le 1$, $z = \sqrt{3}$. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \iiint_U \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = -\iint_T \operatorname{rot} F \cdot N\, dS.$$

Parametrizamos la superficie T mediante

$$T(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\right), \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

está orientado hacia el interior de U, por lo que debemos integrar

$$-\operatorname{rot} F(T(r, \theta)) \cdot T_r \times T_\theta = \left(r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}, r\cos\theta\right) \cdot (0, 0, r) = r^2\cos\theta.$$

El flujo exterior, a través de T, del rotacional del campo F es

$$\iint_T \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, d\theta\, dr = \int_0^1 r^2 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} dr = 0,$$

lo que implica el resultado pedido.