CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 12 de Septiembre de 2006

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. A medianoche, el barco *Arrow* se encuentra situado a 100 kilómetros en dirección este del barco *Blue*. El barco *Arrow* navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco *Blue* lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cúal es la distancia mínima?

Solución. Elegimos un sistema cartesiano de coordenadas con centro en el barco *Blue*, de manera que el eje x coincide con un paralelo y el semieje $x > 0$ indica la dirección este. Además, el eje y coincide con un meridiano y el semieje $y < 0$ indica la dirección sur. En el instante $t = 0$, las coordenadas de *Blue* son $B = (0, 0)$ y las de *Arrow* son $A = (100, 0)$. Dadas las velocidades y direcciones de cada navegación, las ecuaciones parámetricas de las trayectorias de los barcos *Arrow* y *Blue* son:

$$\begin{aligned} r_A(t) &= (100 - 12t, 0), \\ r_B(t) &= (0, -10t), \end{aligned}$$

donde $t \geq 0$. Entonces, la distancia entre ambos barcos es

$$d(t) = \sqrt{(100 - 12t)^2 + 100t^2}, \quad t \geq 0.$$

Para calcular la distancia mínima, definimos la función

$$f(t) = d^2(t) = (100 - 12t)^2 + 100t^2, \quad t \geq 0.$$

Los puntos críticos de esta función se obtienen resolviendo la ecuación

$$f'(t) = 2(100 - 12t)(-12) + 200t = 488t - 2400 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{300}{61}.$$

Observemos que si $t \in [0, 300/61)$ entonces $f'(t) < 0$ y si $t > 300/61$ entonces $f'(t) > 0$. En consecuencia, la distancia mínima se alcanza en el instante $t^* = 300/61 \approx 4.91803$ y su valor es

$$d^* = d\left(\frac{300}{61}\right) = \frac{500}{61}\sqrt{61} \approx 64.0184.$$

Para calcular la hora a la que se encontrarán a distancia mínima uno del otro, el tiempo $t^* \approx 4.91803$ corresponde a 4 horas y $0.91803 \times 60 \approx 55$ minutos.

Ejercicio 2. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

Solución. Para calcular la suma de la serie, observemos que integrando t^{2n} se obtiene el término $(2n+1)$ en el denominador. Por ello, usaremos la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad -1 < t < 1.$$

Si $x \in (-1,1)$, integrando en el intervalo $[0,x]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, t^{2n} \right) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\, dt \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \arctan x.
\end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $x \in (-1,1)$,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para todo $x \in (-1,1)$ tal que $x \neq 0$, tenemos

$$\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2n+1}.$$

Por ello, si elegimos $x = 1/\sqrt{3}$ obtenemos la suma de la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} &= \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt{3}\, \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{3}\, \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 12 de Septiembre de 2006

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el valor máximo de la función

$$f(x, y, z) = x + 2y - z,$$

en el recinto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x + y + z \geq 0\right\}.$$

Solución. La función f es continua en el recinto cerrado y acotado S. Por lo tanto f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S. Para calcular el valor máximo, observemos que $\nabla f(x, y, z) = (1, 2, -1)$, por lo que f no tiene puntos críticos. Entonces, calculamos los valores extremos en la frontera de S, que está formada por la unión de las tres superficies descritas por

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z \geq 0\right\}, \\ S_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x + y + z = 0\right\}, \\ S_3 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0\right\}. \end{aligned}$$

Para obtener los valores extremos en S_1, aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a $f(x, y, z) = x + 2y - z$, resolviendo el sistema dado por $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ y las restricciones

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z \geq 0.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x, \\ 2 &= 2\lambda y, \\ -1 &= 2\lambda z. \end{aligned}$$

Dado que $\lambda \neq 0$, obtenemos $2x = y = -2z$. Sustituyendo en la restricción dada por la igualdad

$$x^2 + 4x^2 + x^2 = 1 \Longleftrightarrow 6x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}},$$

lo que nos proporciona los puntos

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \quad P_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

El punto P_2 no satisface la restricción dada por la desigualdad $x+y+z \geq 0$, por lo que sólo consideramos el punto P_1.

Para obtener los valores extremos en S_2, resolvemos el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla h(x,y,z)$ y las restricciones

$$h(x,y,z) = x+y+z = 0, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda, \\ 2 &= \lambda, \\ -1 &= \lambda, \end{aligned}$$

por lo que el sistema no tiene solución.

Finalmente, para obtener los valores extremos en S_3, resolvemos el sistema dado por $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$ y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 = 1, \\ h(x,y,z) &= x+y+z = 0. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x + \mu, \\ 2 &= 2\lambda y + \mu, \\ -1 &= 2\lambda z + \mu. \end{aligned}$$

Eliminamos el parámetro μ restando las ecuaciones y obteniendo

$$\begin{cases} 2\lambda y - 2\lambda x = 1, \\ 2\lambda y - 2\lambda z = 3, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y - x = 1/2\lambda, \\ y - z = 3/2\lambda, \end{cases}$$

porque $\lambda \neq 0$, ya que si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible. Eliminando λ obtenemos $3y - 3x = y - z$, lo que implica

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 0, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

usando una restricción. Sumando se obtiene $4x = y$, $z = -x - y = -5x$, por lo que la otra restricción es

$$x^2 + 16x^2 + 25x^2 = 1 \Longleftrightarrow 42x^2 = 1 \Longleftrightarrow x \pm \frac{1}{\sqrt{42}},$$

lo que nos proporciona los puntos

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-5}{\sqrt{42}} \right), \quad P_4 = \left(\frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}} \right).$$

Calculamos el valor de la función en los tres puntos seleccionados

$$f(P_1) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = 2.4495, \quad f(P_3) = \frac{14}{\sqrt{42}} = 2.1602, \quad f(P_4) = \frac{-14}{\sqrt{42}} < 0,$$

luego el valor máximo de f es $\sqrt{6}$ y se alcanza en P_1.

Ejercicio 4. Hallar el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Solución. Parametrizamos la esfera con radio a y centrada en el origen usando coordenadas esféricas,

$$S(\Phi,\theta) = (a \operatorname{sen}\Phi\cos\theta, a\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta, a\cos\Phi),$$

donde $0 \le \Phi \le \pi,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$.

El producto vectorial fundamental es

$$\begin{aligned} S_\Phi \times S_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\Phi\cos\theta & a\cos\Phi\operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\Phi \\ -a\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\Phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(a^2\operatorname{sen}^2\Phi\cos\theta, a^2\operatorname{sen}^2\Phi\operatorname{sen}\theta, a^2\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi\right). \end{aligned}$$

En el punto $S(\pi/2,0)=(a,0,0)$ el producto es $S_\Phi\times S_\theta(\pi/2,0)=\left(a^2,0,0\right)$, por lo que la superficie está orientada hacia el exterior del sólido encerrado por S. Entonces tenemos que integrar el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(\Phi,\theta))\cdot(S_\Phi\times S_\theta) &= \frac{1}{(a^2)^{3/2}}(a\operatorname{sen}\Phi\cos\theta, a\operatorname{sen}\Phi\operatorname{sen}\theta, a\cos\Phi)\cdot(S_\Phi\times S_\theta) \\ &= \frac{1}{a^3}\left(a^3\operatorname{sen}^3\Phi\cos^2\theta + a^3\operatorname{sen}^3\Phi\operatorname{sen}^2\theta + a^3\operatorname{sen}\Phi\cos^2\Phi\right) \\ &= \operatorname{sen}^3\Phi + \operatorname{sen}\Phi\cos^2\Phi \\ &= \operatorname{sen}\Phi. \end{aligned}$$

Entonces, el flujo exterior del campo F sobre la superficie S es

$$\begin{aligned} \iint_S F\cdot N\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\Phi\,d\Phi\,d\theta \\ &= 2\pi\left[-\cos\Phi\right]_0^{\pi} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$