

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2007

PRIMERA PARTE

**Ejercicio 1.** Determinar los puntos de máxima y mínima pendiente de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

**Solución.** La pendiente de la gráfica de la función dada es

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Los puntos críticos de  $y'$  se obtienen resolviendo la ecuación  $y'' = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son los puntos críticos:

$$6x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A continuación, obtenemos los conjuntos de crecimiento y decrecimiento de  $y'$ . Si  $|x| < 1/\sqrt{3}$  entonces  $x^2 < 1/3$ , luego  $6x^2 - 2 < 0$ , siendo  $y'' < 0$ . Entonces la pendiente  $y'$  es decreciente en el intervalo  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . Si  $|x| > 1/\sqrt{3}$  tenemos que  $y'' > 0$ , luego la pendiente  $y'$  es creciente en el conjunto  $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ .

Si  $x < -1/\sqrt{3}$  la pendiente es creciente y si  $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$  es decreciente, luego la máxima pendiente se alcanza en el punto  $(-1/\sqrt{3}, 3/4)$  de la gráfica de  $y$ .

Si  $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$  la pendiente es decreciente y si  $x > 1/\sqrt{3}$  es creciente, luego la mínima pendiente se alcanza en  $(1/\sqrt{3}, 3/4)$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $R$  la región plana limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad x \geq 0,$$

el eje  $OX$  y el eje  $OY$ . Consideramos los sólidos que se obtienen cuando la región  $R$  gira en torno al eje  $OX$  y al eje  $OY$ . Calcular el volumen de dichos sólidos.

**Solución.**

El volumen cuando la región  $R$  gira en torno al eje  $OX$ , usando el método de los discos, viene determinado por la integral

$$V_1 = \pi \int_0^\infty f(x)^2 dx = \pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

mientras que el volumen, cuando dicha región gira en torno del eje  $OY$ , utilizando el método de las capas, está determinada por la integral

$$V_2 = 2\pi \int_0^\infty x f(x) dx = 2\pi \int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

Ahora calculamos estas integrales impropias:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^\infty f(x)^2 dx = \pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4} dx = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right]_0^b = \frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \arctan \left( \frac{b}{2} \right) \right] = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^\infty x f(x) dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \\ &= 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{x^2 + 4} \right]_0^b \\ &= 2\pi \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \sqrt{b^2 + 4} \right) - 4\pi = \infty. \end{aligned}$$

El volumen  $V_2$  también puede calcularse utilizando el método de los discos. En este caso tendríamos que despejar  $x$  en la función  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ , obteniendo

$x = g(y) = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 4}$ , donde  $y \in \left( 0, \frac{1}{2} \right]$ . En este caso, el volumen es

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} g(y)^2 dy = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{y^2} - 4 \right) dy = \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{y^2} - 4 \right) dy \\ &= \pi \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{y} - 4y \right]_a^{\frac{1}{2}} = \pi \left[ -2 - 2 + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{a} + 4a \right) \right] = \infty. \end{aligned}$$

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2007

SEGUNDA PARTE

**Ejercicio 3.** Sea  $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$  la temperatura en cada punto de la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ . Hallar las temperaturas máxima y mínima en la curva formada por la intersección de la superficie esférica y el plano  $x - z = 0$ .

---

**Solución.** La función objetivo es  $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ , siendo las restricciones

$$\begin{aligned}g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 = 50, \\h(x, y, z) &= x - z = 0.\end{aligned}$$

El criterio de los multiplicadores de Lagrange asegura que los extremos en la curva satisfacen el sistema dado por

$$\nabla T(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z).$$

Las tres ecuaciones de sistema son

$$\begin{aligned}2x &= 2\lambda x + \mu, \\2y &= 2\lambda y, \\0 &= 2\lambda z - \mu.\end{aligned}$$

La tercera ecuación implica  $\mu = 2\lambda z$ , por lo que  $x = \lambda x + \lambda z$ . La segunda ecuación implica  $y(1 - \lambda) = 0$ , por lo que  $y = 0$  o bien  $\lambda = 1$ .

Si  $y = 0$ , entonces las restricciones se convierten en

$$\begin{aligned}x^2 + z^2 &= 50, \\x - z &= 0,\end{aligned}$$

luego  $2x^2 = 50$ , lo que nos da los puntos  $P_1 = (5, 0, 5)$  y  $P_2 = (-5, 0, -5)$ .

Si  $\lambda = 1$ , entonces  $x = x + z$ , luego  $z = 0$ , y las restricciones implican que  $x = 0$ ,  $y^2 = 50$ . Así obtenemos los puntos  $P_3 = (0, 5\sqrt{2}, 0)$  y  $P_4 = (0, -5\sqrt{2}, 0)$ . Los valores de la temperatura en dichos puntos son

$$T(P_1) = T(P_2) = 125, \quad T(P_3) = T(P_4) = 150,$$

por lo que el máximo absoluto se alcanza en  $P_3$  y  $P_4$ , mientras que el mínimo absoluto se alcanza en  $P_1$  y  $P_2$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $R$  la región plana interior a la curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

- a) Utilizar el cambio de variables  $u = x/2$ ,  $v = y/\sqrt{2}$  para calcular la integral doble

$$\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy.$$

- b) Calcular el volumen del sólido

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 9 - 2x^2 - 4y^2\}.$$

- c) Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (8x + z, 2xz^2, -4y^2)$$

a través de la frontera  $S$  del sólido  $Q$ .

**Solución.** a) El cambio de variables dado es  $x = 2u$ ,  $y = \sqrt{2}v$ , por lo que la región  $R$  se transforma en el plano  $uv$  en

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

A continuación, calculamos el jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}.$$

Usando el teorema del cambio de variables, calculamos la integral doble,

$$\begin{aligned} \iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy &= \iint_T (8 - 8u^2 - 8v^2) 2\sqrt{2} du dv \\ &= 16\sqrt{2} \iint_T (1 - u^2 - v^2) du dv \\ &= 16\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el cambio a coordenadas polares dado por  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ . Finalmente

$$\begin{aligned} \iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy &= 16\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

b) El volumen del sólido  $Q$  puede calcularse mediante la integral triple

$$V(Q) = \iiint_Q dx dy dz = \iint_R (9 - 2x^2 - 4y^2 - 1) dx dy,$$

siendo  $R$  la proyección del sólido sobre el plano de ecuación  $z = 0$ , que es la región plana limitada por la curva de ecuación  $9 - 2x^2 - 4y^2 - 1 = 0$ , es decir la curva plana de ecuación  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ . Usando el resultado del apartado a), obtenemos que

$$V(Q) = \iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy = 8\sqrt{2}\pi.$$

c) Para calcular el flujo a través de la superficie cerrada  $S$  utilizamos el teorema de Gauss de la divergencia,

$$\iint_S (F \cdot N) dS = \iiint_Q \operatorname{div}(F) dx dy dz.$$

Como la divergencia del campo dado es  $\operatorname{div}(F) = F_x + F_y + F_z = 8$ , obtenemos

$$\iint_S (F \cdot N) dS = \iiint_Q \operatorname{div}(F) dx dy dz = 8 \iiint_Q dx dy dz = 64\sqrt{2}\pi,$$

usando el resultado del apartado b).