

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Primer Examen Parcial. 18 de Enero de 2007

Ejercicio 1. Se consideran las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos. Determinar la distancia mínima entre los puntos de corte y obtener la recta que verifica dicha propiedad.

Solución: La ecuación de las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos es $y - 8 = m(x - 1)$, $-\infty < m < 0$. Para calcular los puntos de corte con el semieje $y = 0$, $x > 0$, resolvemos $m(x - 1) = -8$, obteniendo

$$A(m) = \left(1 - \frac{8}{m}, 0\right) = \left(\frac{m-8}{m}, 0\right).$$

Los puntos de corte con el semieje $x = 0$, $y > 0$, se obtienen resolviendo $y - 8 = -m$, por lo que son $B(m) = (0, 8 - m)$. Entonces, la distancia entre los puntos de corte es

$$\begin{aligned} F(m) &= d(A(m), B(m)) = \sqrt{\left(\frac{m-8}{m}\right)^2 + (8-m)^2} = \sqrt{(m-8)^2 \left(\frac{1}{m^2} + 1\right)} \\ &= |m-8| \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} = (8-m) \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}, \quad -\infty < m < 0. \end{aligned}$$

Calculamos los puntos críticos mediante

$$\begin{aligned} F'(m) &= -\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} + (8-m) \frac{-\frac{2}{m^3}}{2\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = \frac{-\left(\frac{1}{m^2} + 1\right) - \frac{(8-m)}{m^3}}{\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} \\ &= \frac{-m - m^3 - 8 + m}{m^3 \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = \frac{-m^3 - 8}{m^3 \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}} = 0. \end{aligned}$$

La única solución real de la ecuación $m^3 = -8$ es $m = \sqrt[3]{-8} = -2$, que pertenece al intervalo $(-\infty, 0)$.

Para probar que $F(m)$ alcanza su valor mínimo en $m = -2$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $m < -2$ entonces $m^3 < -8$ y $m^3 < 0$ porque $m < 0$. Por tanto $F'(m) < 0$ y $F(m)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$. Si $-2 < m < 0$ entonces $m^3 > -8$ y $m^3 < 0$. Por ello $F'(m) > 0$ y $F(m)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$. Entonces

$$F(-2) = 10\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 10\sqrt{\frac{5}{4}} = 5\sqrt{5}$$

es el mínimo absoluto de $F(m)$ en el abierto $(-\infty, 0)$. La recta con distancia mínima entre los puntos de corte es $y - 8 = -2(x - 1)$.

Ejercicio 2. Un toro se forma al girar la región contenida en la circunferencia

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1,$$

alrededor del eje y . Calcular el volumen de este sólido de revolución, usando el método de las arandelas y el método de las capas.

Solución: Las funciones que representan las fronteras de la región son

$$x = 2 + \sqrt{1 - y^2}, \quad x = 2 - \sqrt{1 - y^2},$$

donde $y \in [-1, 1]$. El volumen, usando el método de las arandelas, es

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1 - y^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1 - y^2} \right)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_{-1}^1 8\sqrt{1 - y^2} dy = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8\pi \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 8\pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = 4\pi^2, \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $y = \operatorname{sen} t$.

Dado que el eje de giro es y , la variable para el método de las capas es x . El radio de cada cilindro es $r = x$. Las fronteras de la región vienen dadas por $y = \pm\sqrt{1 - (x - 2)^2}$, $x \in [1, 3]$. Entonces, la altura es $h = 2\sqrt{1 - (x - 2)^2}$. El volumen, usando el método de las capas, es

$$V = 2\pi \int_1^3 rh dx = 4\pi \int_1^3 x\sqrt{1 - (x - 2)^2} dx.$$

Para calcular la integral, consideramos el cambio de variable

$$x - 2 = \operatorname{sen} t, \quad dx = \cos t dt, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 + \operatorname{sen} t) \cos^2 t dt \\ &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt \\ &= 4\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t + \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt \\ &= 4\pi \left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Para cada número natural $n \geq 2$, sea r_n la recta determinada por los puntos $(1, 2)$ y $(n, 0)$. Consideremos la región plana R_n comprendida entre las rectas r_{2n}, r_{2n+1} y las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 2$.

- Calcular el área a_n de la región R_n , para cada $n \geq 1$.
- Calcular el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Solución: **a)** La ecuación de la recta r_n que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(n, 0)$ es

$$y - 2 = \frac{-2}{n-1}(x-1), \quad n \geq 2.$$

Las rectas r_n cortan a la recta $x = 1$ en el punto $(1, 2)$ y cortan a la recta $x = 2$ en los puntos

$$(x_n, y_n) = \left(2, 2 - \frac{2}{n-1}\right), \quad n \geq 2.$$

Cada región plana R_n es un triángulo de altura igual a 1 y base

$$\begin{aligned} y_{2n+1} - y_{2n} &= \left(2 - \frac{2}{2n+1-1}\right) - \left(2 - \frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n - (2n-1)}{(2n-1)n} = \frac{1}{(2n-1)n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces, el área de la región R_n es $a_n = \frac{1}{(2n-1)2n}$, para cada $n \geq 1$.

b) El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)2n}}{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n-1)2n} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$. En el extremo $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$$

tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, por lo que es convergente. En el extremo $x = -1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)2n}$$

es absolutamente convergente, por lo que también es convergente. Por tanto, el dominio de convergencia de la serie de potencias es $[-1, 1]$.