CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 1 de Junio de 2007

Ejercicio 1.
(a) Calcular el área de la región plana encerrada por la lemniscata de ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$.
(b) Obtener el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$$

y al hemisferio de ecuación $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

Solución: (a) La ecuación de la lemniscata en coordenadas polares es $r^4 = 9r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$. Usando una identidad trigonométrica y simplificando obtenemos $r^2 = 9\cos(2\theta)$. El área puede calcularse utilizando la fórmula para curvas en coordenadas polares $A(R)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$, o mediante la integral doble $A(R)=\iint\limits_R dx\,dy$. Utilizando la simetría de la curva, el área es

$$A(R) = 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta)\,d\theta = \frac{36}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

Usando integración doble, teniendo en cuenta la simetría de la curva y con el cambio a coordenadas polares, obtenemos

$$A(R) = \iint\limits_R dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}} r\,dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[r^2\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}}\,d\theta$$
$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta = 18\left[\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.$$

(b) Para calcular el volumen usaremos coordendas cilíndricas. Haciendo uso de la simetría del sólido y teniendo en cuenta que la ecuación del hemisferio en coordenadas cilíndricas es $z=\sqrt{9-r^2}$, obtenemos

$$V = \iint\limits_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}}\sqrt{9-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$
$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{9\cos(2\theta)}}\,d\theta = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left((9-9\cos(2\theta))^{3/2}-27\right)\,d\theta$$
$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-(1-\cos(2\theta))^{3/2}\right)\,d\theta = 36\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\left(2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}\right)\,d\theta$$
$$= 36\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3\theta\right)\,d\theta = 9\pi - 72\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= 9\pi - 72\sqrt{2}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(3\pi - 16\sqrt{2}+20\right).$$

Ejercicio 2.
Hallar el punto más alto de la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad 2x + y - z = 2.$$

Solución: Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función altura $f(x, y, z) = z$, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

y las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ h(x, y, z) &= 2x + y - z = 2. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda x + 2\mu, \\ 0 &= 2\lambda y + \mu, \\ 1 &= 2\lambda z - \mu. \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica $\mu = -2\lambda y$, por lo que la primera y la tercera son

$$2\lambda x - 4\lambda y = 0, \quad 2\lambda z + 2\lambda y = 1.$$

La primera implica que $\lambda(x - 2y) = 0$, y la tercera que $\lambda \neq 0$, por lo que obtenemos $x = 2y$. Sustituyendo en la segunda restricción $5y - z = 2$, por lo que $z = 5y - 2$. Entonces, la primera restricción implica

$$4y^2 + y^2 + (5y - 2)^2 = 36 \Longleftrightarrow 30y^2 - 20y - 32 = 0.$$

Resolvemos la ecuación $15y^2 - 10y - 16 = 0$, obteniendo

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 960}}{30} = \frac{5 \pm \sqrt{265}}{15}.$$

Dado que $z = 5y - 2$, el punto de la curva con coordenada z mayor es

$$P = \left(\frac{10 + 2\sqrt{265}}{15}, \frac{5 + \sqrt{265}}{15}, \frac{-1 + \sqrt{265}}{3} \right).$$

Ejercicio 3.
Sea S la superficie definida por $z = 1 - x^2 - y^2,\ x + z \geq 1$ y sea F el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$. Calcular el flujo exterior del campo F a través de S, directamente y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss.

Solución: Elegimos la parametrización $S(x, y) = \left(x, y, 1 - x^2 - y^2\right)$, donde el dominio de definición D es

$$x + z = x + 1 - x^2 - y^2 \geq 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq x.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1),$$

y tiene la orientación exterior al paraboloide porque en el punto $S(0, 0) = (0, 0, 1)$, el producto vectorial $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(x, y)) \cdot S_x \times S_y &= \left(y\left(1 - x^2 - y^2\right), x\left(1 - x^2 - y^2\right), xy\right) \cdot (2x, 2y, 1) \\ &= 4xy\left(1 - x^2 - y^2\right) + xy = xy\left(5 - 4x^2 - 4y^2\right). \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo F a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N\, dS &= \iint_D xy\left(5 - 4x^2 - 4y^2\right)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(5 - 4r^2\right) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \left(5r^3 - 4r^5\right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{5r^4}{4} - \frac{4r^6}{6}\right]_0^{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{5}{4}\cos^5\theta \operatorname{sen}\theta - \frac{2}{3}\cos^7\theta \operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\ &= \left[-\frac{5}{4}\frac{\cos^6\theta}{6} + \frac{2}{3}\frac{\cos^8\theta}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando el cambio a coordenadas polares en la integral doble, que transforma $x^2 + y^2 \leq x$ en $0 \leq r \leq \cos\theta$ y $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Para aplicar el teorema de Gauss, consideramos el sólido U cuyas fronteras son S y la superficie T definida por $x^2 + y^2 \leq x$, $x + z = 1$. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} F \cdot N \, dS = \iiint_{U} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0,$$

porque $\operatorname{div} F(x, y, z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint_{S} F \cdot N \, dS = -\iint_{T} F \cdot N \, dS.$$

Dado que $z = 1 - x$, parametrizamos la superficie T mediante

$$T(x, y) = (x, y, 1 - x), \quad x^2 + y^2 \leq x.$$

El producto vectorial fundamental

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1),$$

está orientado hacia el interior de U, por lo que debemos integrar

$$-F(T(x, y)) \cdot T_x \times T_y = -(y(1 - x), x(1 - x), xy) \cdot (1, 0, 1) = -y.$$

Para calcular el flujo exterior de F a través de T, usaremos el cambio a coordenadas polares en la integral doble

$$\begin{aligned}
\iint_{T} F \cdot N \, dS &= \iint_{D} -y \, dx \, dy \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta \, r \, dr \, d\theta \\
&= -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\
&= -\frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo que implica el resultado pedido.