

## CÁLCULO

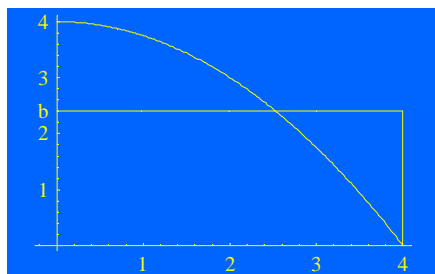
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 3 de Septiembre de 2007

PRIMERA PARTE

**Ejercicio 1.** La gráfica de la función  $y = 4 - \frac{x^2}{4}$  en el intervalo  $[0, 4]$  gira alrededor de la recta  $y = b$ , donde  $b \in [0, 4]$ . Calcular el volumen del sólido resultante en función de  $b$ . Hallar el valor de  $b$  que hace mínimo el volumen de dicho sólido.

**Solución.** El volumen, usando el método de los discos, es  $V(b) = \pi \int_0^4 [r(x)]^2 dx$ , siendo el radio  $r(x) = |y(x) - b|$  para  $x \in [0, 4]$ .



En primer lugar, calculamos

$$\begin{aligned} [r(x)]^2 &= (y(x) - b)^2 = \left(4 - \frac{x^2}{4} - b\right)^2 \\ &= \frac{x^4}{16} + \frac{bx^2}{2} - 2x^2 + b^2 - 8b + 16. \end{aligned}$$

A continuación, obtenemos

$$\begin{aligned} V(b) &= \pi \int_0^4 \left( \frac{x^4}{16} + \frac{(b-4)x^2}{2} + b^2 - 8b + 16 \right) dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^5}{80} + \frac{(b-4)x^3}{6} + (b^2 - 8b + 16)x \right]_0^4 \\ &= \pi \left( 4b^2 - \frac{64b}{3} + \frac{512}{15} \right). \end{aligned}$$

La función  $V(b)$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[0, 4]$ , por lo que tiene extremos absolutos. Dado que es derivable, calculamos los puntos críticos resolviendo la ecuación  $V'(b) = \pi(8b - 64/3) = 0$ . El único punto crítico  $b = 8/3$  pertenece al intervalo  $[0, 4]$  y es un mínimo relativo porque  $V''(b) = 8\pi > 0$ . Además, es el mínimo absoluto porque

$$V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{45}\pi < V(4) = \frac{64}{5}\pi < V(0) = \frac{512}{15}\pi.$$

**Ejercicio 2.** Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}},$$

estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

---

**Solución.** Para analizar el carácter de la serie, calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{(2n+3)2^{2n+3}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n+3)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Entonces el criterio del cociente implica que la serie es absolutamente convergente. Para calcular la suma de la serie, usaremos la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Si  $x \in [0, 1)$ , integrando en el intervalo  $[0, x]$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \arctan x. \end{aligned}$$

Si  $x \in (-1, 0]$ , integrando en el intervalo  $[x, 0]$ , obtenemos el mismo resultado. En consecuencia, para todo  $x \in (-1, 1)$ ,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Por ello, si elegimos  $x = 1/2$  obtenemos la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}} = \arctan \frac{1}{2}.$$

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 3 de Septiembre de 2007

SEGUNDA PARTE

**Ejercicio 3.** Hallar el punto más bajo de la curva intersección del cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  y el plano  $x + 2z = 4$ .

---

**Solución.** Aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange a la función altura  $f(x, y, z) = z$ , resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

y las restricciones

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$h(x, y, z) = x + 2z = 4.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$0 = 2\lambda x + \mu,$$

$$0 = 2\lambda y,$$

$$1 = -2\lambda z + 2\mu.$$

La segunda ecuación implica que  $\lambda = 0$  o bien  $y = 0$ . Si  $\lambda = 0$ , usando las ecuaciones primera y tercera, tenemos que  $\mu = 0$  y  $2\mu = 1$ , que es una contradicción. Así, obtenemos que  $y = 0$ . Sustituyendo en la primera restricción  $x^2 = z^2$ , por lo que  $z = x$  o bien  $z = -x$ . Entonces, para  $z = x$ , la segunda restricción implica  $3x = 4$ , por lo que obtenemos el punto

$$P = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right).$$

Si  $z = -x$ , la segunda restricción implica  $-x = 4$ , obteniendo el punto  $Q = (-4, 0, 4)$ . Los valores de la función altura en dichos puntos son

$$f(P) = \frac{4}{3} < f(Q) = 4,$$

luego  $P$  es el punto más bajo de la curva.

**Ejercicio 4.** Calcular la integral de línea

$$\oint_C (8x + z) dx + 2xz^2 dy - 4y^2 dz,$$

siendo  $C$  la curva definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} z = 9 - 2x^2 - 4y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

que tiene orientación positiva si se observa desde un punto alto del eje  $OZ$ .

**Solución.** Calculamos directamente la integral de línea. Observemos que los semiejes de la elipse  $2x^2 + 4y^2 = 8$  son  $a = 2$  y  $b = \sqrt{2}$ . La elipse contenida en el plano  $z = 1$ , se parametriza mediante  $r(\theta) = (2 \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1)$ , donde  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Entonces la integral de línea es

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left[ (16 \cos \theta + 1)(-2 \sin \theta) + 4 \cos \theta \sqrt{2} \cos \theta \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -32 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta + 4\sqrt{2} \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \left[ -16 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \right]_0^{2\pi} + 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= 4\sqrt{2} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

**Otro método** es calcular la integral de línea usando el teorema de Stokes. Observemos que la curva  $C$  es la frontera de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 \leq 8, z = 1\}.$$

Parametrizamos  $S$  mediante  $S(x, y) = (x, y, 1)$ , donde  $2x^2 + 4y^2 \leq 8$ . Dado que el producto vectorial fundamental es  $S_x \times S_y = (0, 0, 1) = N$ , la orientación positiva de  $C$  viene inducida por la parametrización de  $S$ . El teorema de Stokes asegura que  $\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot N dS$ . Calculamos

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ 8x + z & 2xz^2 & -4y^2 \end{vmatrix} = (-8y - 4xz, 1, 2z^2).$$

Por lo tanto,  $\text{rot } F(S(x, y)) \cdot N dS = 2 dx dy$ , lo que implica

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot N dS = 2 \iint_R dx dy,$$

siendo  $R$  la región interior a la elipse  $2x^2 + 4y^2 = 8$ . Como los semiejes de la elipse son  $a = 2$  y  $b = \sqrt{2}$ , obtenemos  $\oint_C F \cdot dr = 2 \text{área}(R) = 4\sqrt{2}\pi$ .