

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2008

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Consideremos los rectángulos de lados paralelos a los ejes que pueden inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Calcular las dimensiones y el área del rectángulo que tiene área máxima.

Solución. El vértice de un rectángulo de este tipo, situado en el primer cuadrante, es

$$\left(x, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right), \quad 0 < x < a.$$

Usando la simetría de la elipse, el área de un rectángulo inscrito es

$$A(x) = 4bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2},$$

donde $0 < x < a$. Los puntos críticos del área se obtienen resolviendo la ecuación $A'(x) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{4b}{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= \frac{4b}{a} \left(\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

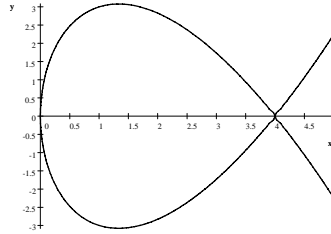
Las soluciones de esta ecuación son

$$a^2 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{a^2}{2} \iff x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $x \in (0, a)$ el único punto crítico es $x^* = a/\sqrt{2}$. Si $x \in (0, a/\sqrt{2})$ entonces $x^2 < a^2/2$, luego $a^2 - 2x^2 > 0$, y la función área es creciente en el intervalo $(0, a/\sqrt{2})$. Si $x \in (a/\sqrt{2}, a)$ tenemos que $x^2 > a^2/2$, por lo que $a^2 - 2x^2 < 0$, y la función área es decreciente en el intervalo $(a/\sqrt{2}, a)$. En consecuencia, el área máxima se alcanza en $x^* = a/\sqrt{2}$. Las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima son:

$$2x^* = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a, \quad 2y^* = 2b\sqrt{1 - \frac{a^2}{2a^2}} = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b, \quad A^* = 2ab.$$

Ejercicio 2. Sea R la región plana limitada por el lazo de la curva definida por $y^2 = x(4-x)^2$. Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen cuando la región R gira alrededor del eje x , del eje y , y de la recta $x = 4$.



Solución.

El volumen del sólido obtenido al girar la región R en torno al eje x , usando el método de los discos, se calcula mediante la integral

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 x(4-x)^2 dx = \pi \int_0^4 (16x - 8x^2 + x^3) dx \\ &= \pi \left[8x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi. \end{aligned}$$

El volumen del sólido obtenido al girar R en torno del eje y , utilizando el método de las capas, es

$$V_y = 2\pi \int_0^4 r(x) h(x) dx,$$

donde el radio $r(x) = x$, y la altura $h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{x}(4-x)$. Entonces

$$\begin{aligned} V_y &= 4\pi \int_0^4 x\sqrt{x}(4-x) dx = 4\pi \int_0^4 (4x^{3/2} - x^{5/2}) dx \\ &= 4\pi \left[\frac{8}{5}x^{5/2} - \frac{2}{7}x^{7/2} \right]_0^4 = \frac{2048}{35}\pi. \end{aligned}$$

El volumen del sólido obtenido al girar R en torno a la recta $x = 4$, utilizando el método de las capas, es

$$V_r = 2\pi \int_0^4 r(x) h(x) dx,$$

donde el radio $r(x) = 4-x$, y la altura $h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{x}(4-x)$. Entonces

$$\begin{aligned} V_r &= 4\pi \int_0^4 (4-x)\sqrt{x}(4-x) dx = 4\pi \int_0^4 (16x^{1/2} - 8x^{3/2} + x^{5/2}) dx \\ &= 4\pi \left[\frac{32}{3}x^{3/2} - \frac{16}{5}x^{5/2} + \frac{2}{7}x^{7/2} \right]_0^4 = \frac{8192}{105}\pi. \end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2008

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3.

- (a) Dada la función $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 3x - 4y$, calcular sus extremos absolutos sobre la región cerrada y acotada

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

- (b) Sea C la curva frontera de la región D , con orientación positiva. Calcular la integral de línea

$$\oint_C xy \, dx + x^2 \, dy.$$

Solución.

(a) Calculamos los puntos críticos en el interior de la región D , resolviendo el sistema $f_x = 2x - 3 = 0$, $f_y = 8y - 4 = 0$. El único punto crítico es $P_1 = (3/2, 1/2)$. Dado que $3/2 > 0$ y $9/4 + 1 < 4$, el punto pertenece al interior de D . A continuación, calculamos los puntos críticos sobre la frontera $F = F_1 \cup F_2$, donde F_1 se define mediante $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, $x > 0$, y F_2 se define por las condiciones $x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0$, $x = 0$.

En la frontera F_1 , usamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 = 2\lambda x, \\ 8y - 4 = 8\lambda y, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1 - \lambda)x = 3, \\ 2(1 - \lambda)y = 1, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores implican que $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Dividiendo la primera ecuación entre la segunda eliminamos λ , obteniendo que $x = 3y$. Sustituyendo en la última ecuación obtenemos los puntos

$$P_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \quad \text{y} \quad P_3 = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

Dado que debe verificarse la condición $x > 0$, el único punto sobre la frontera F_1 es P_2 . Finalmente, obtendremos los puntos críticos sobre la frontera F_2 . En este caso, la función $g(y) = f(0, y) = 4y^2 - 4y$, definida en el intervalo $[-1, 1]$, nos permite encontrar los puntos críticos sobre F_2 . Resolviendo la ecuación $g'(y) = 8y - 4 = 0$, obtenemos $y = 1/2$, y el punto de la frontera $P_4 = (0, 1/2)$. Además, tenemos que considerar los extremos -1 y 1 del

intervalo, es decir los puntos $P_5 = (0, 1)$ y $P_6 = (0, -1)$. Evaluamos la función en los puntos críticos obtenidos:

$$f(P_1) = -\frac{13}{4}, \quad f(P_2) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}}, \quad f(P_4) = -1, \quad f(P_5) = 0, \quad f(P_6) = 8.$$

En consecuencia, el valor mínimo es $f(P_1)$ y el valor máximo es $f(P_6)$.

(b) Calcularemos la integral de línea directamente y usando el teorema de Green. Observemos que la frontera de la región D , orientada positivamente, es la curva $C = C_1 \cup C_2$. Entonces

$$\oint_C xy \, dx + x^2 \, dy = \oint_{C_1} xy \, dx + x^2 \, dy + \oint_{C_2} xy \, dx + x^2 \, dy,$$

donde

$$C_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right., \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{y} \quad C_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -t \end{array} \right., \quad t \in [-1, 1].$$

Calculamos la primera integral

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} xy \, dx + x^2 \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [2 \cos t \sin t (-2 \sin t) + 4 \cos^2 t \cos t] \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-4 \sin^2 t \cos t + 4 \cos^3 t) \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-8 \sin^2 t \cos t + 4 \cos t) \, dt \\ &= \left[-\frac{8}{3} \sin^3 t + 4 \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos la segunda integral $\oint_{C_2} xy \, dx + x^2 \, dy = \int_{-1}^1 0 \, dt = 0$. Por lo tanto

$$\oint_C xy \, dx + x^2 \, dy = \frac{8}{3}.$$

Para usar el teorema de Green, comprobamos que la región D es simplemente conexa y el campo vectorial tiene derivadas parciales continuas en un abierto que contiene a la región D . En este caso sabemos que

$$\oint_C M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \oint_C xy \, dx + x^2 \, dy &= \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} x \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Hallar el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$ a través de la superficie exterior del sólido

$$x^2 + y^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 3,$$

directamente y usando el teorema de Gauss.

Solución. La frontera del sólido es la superficie $S \cup T_1 \cup T_2$, donde S es el cilindro $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, $0 \leq z \leq 3$, siendo T_1 y T_2 las tapas contenidas en los planos $z = 0$ y $z = 3$ respectivamente. Usando coordenadas cilíndricas desplazadas $x = \frac{1}{2} + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, los puntos de S verifican $r = 1/2$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces parametrizamos S mediante

$$S(\theta, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, z \right), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 3.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_\theta \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{1}{2} \sin \theta & \frac{1}{2} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, 0 \right),$$

y tiene la orientación exterior al sólido porque en el punto $S(0, 0) = (1, 0, 0)$, el producto vectorial $S_\theta \times S_z(0, 0) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. Calculamos el producto escalar

$$\begin{aligned} F(S(\theta, z)) \cdot S_\theta \times S_z &= \left(2 + 2 \cos \theta, -\frac{1}{2} \sin^2 \theta, z^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, 0 \right) \\ &= \cos \theta + \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^3 \theta \\ &= \cos \theta + \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo F a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N \, dS &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta + \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos^2 \theta \right) d\theta \, dz \\ &= \int_0^3 \left[\sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{12} \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} dz \\ &= \int_0^3 \pi \, dz = 3\pi. \end{aligned}$$

Parametrizamos las tapas usando coordenadas cartesianas, por lo que

$$T_1(x, y) = (x, y, 0), \quad T_2(x, y) = (x, y, 3), \quad \text{donde} \quad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2.$$

El producto vectorial fundamental para las dos tapas es el vector $(0, 0, 1)$, luego T_1 tiene orientación *interior* y T_2 exterior. Dado que

$$F(T_1(x, y)) \cdot (0, 0, -1) = (4x, -2y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$$

el flujo de F a través de T_1 es cero. Finalmente, calculamos

$$F(T_2(x, y)) \cdot (0, 0, 1) = (4x, -2y^2, 9) \cdot (0, 0, 1) = 9,$$

por lo que el flujo de F a través de T_2 es

$$\iint_T F \cdot N \, dS = \iint_{(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{1}{2})^2} 9 \, dx \, dy = 9\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}.$$

Entonces, el flujo de F a través de la superficie exterior del sólido es

$$\iint_{S \cup T_1 \cup T_2} F \cdot N \, dS = 3\pi + \frac{9\pi}{4} = \frac{21\pi}{4}.$$

Como las componentes del campo tienen derivadas parciales continuas en el sólido Q , el teorema de la divergencia de Gauss asegura que

$$\iint_{S \cup T_1 \cup T_2} F \cdot N \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_Q (4 - 4y + 2z) \, dx \, dy \, dz.$$

Para calcular la integral triple usaremos el cambio $x = \frac{1}{2} + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. Entonces $Q = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\}$. Dado que el jacobiano del cambio es r , tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_Q (4 - 4y + 2z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (4 - 4r \sin \theta + 2z) r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} [4rz - 4r^2 z \sin \theta + rz^2]_0^3 \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (21r - 12r^2 \sin \theta) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^{1/2} [21r\theta + 12r^2 \cos \theta]_0^{2\pi} \, dr \\ &= \int_0^{1/2} 42\pi r \, dr \\ &= [21\pi r^2]_0^{1/2} \\ &= \frac{21\pi}{4}. \end{aligned}$$