CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Primer Examen Parcial. 21 de Enero de 2008

Ejercicio 1. Sea $P = (a, a^2)$ con $a > 0$ un punto cualquiera de la gráfica de la parábola $y = x^2$ situado en el semiplano $x > 0$.

(i) Demostrar que la intersección de la parábola con su recta normal en P es el punto

$$Q = \left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right).$$

(ii) Encontrar el valor de a que minimiza la distancia entre P y Q, razonando la respuesta.

Solución: (i) La ecuación de la recta normal a la parábola en $P = (a, a^2)$, donde $a > 0$, es $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$. Dado que el punto $Q = (x, y)$ pertenece a la parábola $y = x^2$ y a la recta normal, su coordenada x verifica la ecuación

$$x^2 - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \Longleftrightarrow x + a = -\frac{1}{2a},$$

porque $x - a \neq 0$. Entonces, las coordenadas de Q son

$$x = -a - \frac{1}{2a}, \quad y = \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2.$$

(ii) El cuadrado de la distancia entre P y Q es

$$F(a) = \left(-2a - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left[\left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - a^2\right]^2 = \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4a^2+1}{4a^2}\right)^2 = \left(\frac{4a^2+1}{2a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) = \frac{\left(4a^2+1\right)^3}{16a^4},$$

donde $a > 0$. Calculamos los puntos críticos en $(0, \infty)$ mediante

$$F'(a) = \frac{3\left(4a^2+1\right)^2 \, 8a \, 16a^4 - 64a^3\left(4a^2+1\right)^3}{256a^8}$$

$$= \frac{64a^3\left(4a^2+1\right)^2\left(6a^2 - 4a^2 - 1\right)}{256a^8} = \frac{\left(4a^2+1\right)^2\left(2a^2-1\right)}{4a^5} = 0.$$

Como $\left(4a^2+1\right)^2 > 0$, el único punto crítico en $(0, \infty)$ es la solución de la ecuación $2a^2 - 1 = 0$ tal que $a > 0$, es decir $a^* = 1/\sqrt{2}$. Para probar que F alcanza su valor mínimo en $a^* = 1/\sqrt{2}$, usaremos el criterio de la primera derivada. Si $0 < a < 1/\sqrt{2}$ entonces $2a^2 - 1 < 0$ y $a^5 > 0$ porque $a > 0$. Por tanto $F'(a) < 0$ y F es decreciente en el intervalo $\left(0, 1/\sqrt{2}\right)$. Si $a > 1/\sqrt{2}$ entonces $2a^2 - 1 > 0$ y $a^5 > 0$. Por ello $F'(a) > 0$ y F es creciente en el intervalo $\left(1/\sqrt{2}, \infty\right)$. En consecuencia, el mínimo absoluto de F en el intervalo $(0, \infty)$ se alcanza en $a^* = 1/\sqrt{2}$.

Ejercicio 2. Sea D la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

(i) Encontrar la pendiente de la recta $y = mx$ que divide la región D en dos regiones de igual área.

(ii) Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta obtenida en (i), al girar alrededor del eje y.

Solución: (i) La parábola corta al eje x en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, siendo la región acotada

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq x - x^2\right\}.$$

En primer lugar, calculamos el área de esta región

$$a\,(D) = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

por lo que el área de cada una de las dos regiones determinadas por la recta es $1/12$. Para obtener el área de la región acotada por la parábola y la recta $y = mx$, determinamos los puntos intersección de ambas resolviendo la ecuación

$$x - x^2 = mx \Longleftrightarrow x^2 + (m-1)\,x = 0 \Longleftrightarrow x\,(x + m - 1) = 0.$$

Sus soluciones son $x = 0$ y $x = 1 - m$, por lo que los puntos intersección son $(0, 0)$ y $\left(1 - m, m - m^2\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{12} &= \int_0^{1-m} (x - x^2 - mx)\,dx = \left[(1-m)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1-m} \\ &= \frac{(1-m)^3}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} = \frac{(1-m)^3}{6},\end{aligned}$$

lo que implica que $(1-m)^3 = 1/2$, siendo $m = 1 - \sqrt[3]{1/2}$.

(ii) Para calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta $y = mx$, usaremos el método de las capas. Dado que el eje de giro es y, la variable para este método es x. El radio de cada cilindro es $r = x$ y la altura es $h = x - x^2 - mx$. El volumen de esta región es

$$\begin{aligned}V\,(m) &= 2\pi \int_0^{1-m} x(x - x^2 - mx)\,dx = 2\pi \int_0^{1-m} \left((1-m)\,x^2 - x^3\right)\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{(1-m)\,x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{1-m} = 2\pi \frac{(1-m)^4}{12} = \pi \frac{(1-m)^4}{6}.\end{aligned}$$

Dado que la pendiente de la recta obtenida en (i) es $m = 1 - \sqrt[3]{1/2}$, tenemos que $(1-m)^4 = 1/2 \ \sqrt[3]{1/2}$ y el volumen pedido es

$$V = \frac{\sqrt[3]{1/2}}{12}\pi.$$

Ejercicio 3. (i) Usar la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

para calcular la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia.

(ii) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución: (i) La suma de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Derivando ambos términos, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Entonces, la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Observemos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

En los extremos $x=1$ y $x=-1$, las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ son divergentes porque sus términos no convergen a cero, luego el dominio de convergencia de la serie de Maclaurin es $(-1,1)$.

(ii) La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{9}{10}\right)^n = f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9/10}{(1-9/10)^2} = \frac{9/10}{(1/10)^2} = 90,$$

porque $9/10 \in (-1,1)$.