

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 5 de Junio de 2008

Ejercicio 1.

Consideremos la región plana $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \geq 2\}$.

1. Calcular el área de R .
2. Sea C la curva frontera de R orientada positivamente. Calcular la integral de línea

$$\oint_C (2xy - y^2) dx + (x^2 + y) dy.$$

3. Calcular la longitud de C .

Solución: 1. La región está en el interior de la circunferencia $r = 2 \cos \theta$, donde $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, y en el exterior de la circunferencia $r = \sqrt{2}$, donde $\theta \in [-\pi, \pi]$. Dado que $\cos \theta = \sqrt{2}/2$, las coordenadas polares de los puntos intersección de las dos circunferencias son $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \pm\pi/4$. Usando la simetría de la región y el cambio a coordenadas polares, obtenemos el área

$$\begin{aligned} A(R) &= \iint_R dx dy = 2 \int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} r dr d\theta = \int_0^{\pi/4} [r^2]_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (4 \cos^2 \theta - 2) d\theta = \int_0^{\pi/4} (2 + 2 \cos 2\theta - 2) d\theta = [\sin 2\theta]_0^{\pi/4} = 1. \end{aligned}$$

2. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C (2xy - y^2) dx + (x^2 + y) dy = \iint_R [2x - (2x - 2y)] dx dy = \iint_R 2y dx dy.$$

Calculamos la integral doble cambiando a coordenadas polares,

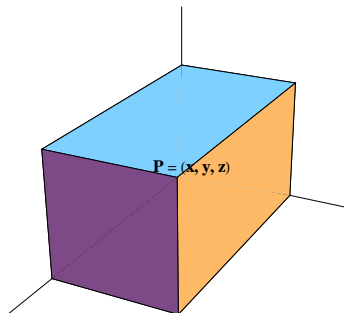
$$\begin{aligned} \iint_R 2y dx dy &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} 2r \sin \theta r dr d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [r^3 \sin \theta]_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(8 \cos^3 \theta - 2\sqrt{2}) \sin \theta] d\theta \\ &= \frac{2}{3} [-2 \cos^4 \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0, \end{aligned}$$

porque $\cos \pi/4 = \cos(-\pi/4)$.

3. La curva C es la unión de dos arcos C_1 y C_2 . Sea C_1 el arco comprendido entre $-\pi/4$ y $\pi/4$ de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen. Su longitud es $\sqrt{2}\pi/2$. Como la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ tiene radio 1 y el arco C_2 está comprendido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, con respecto a su centro $(1, 0)$, su longitud es π . Entonces, la longitud de C es la suma $\sqrt{2}\pi/2 + \pi$.

Ejercicio 2.

Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x, y, z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloides de ecuación $2x^2 + y^2 + z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



Solución: Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange al volumen $V(x, y, z) = xyz$, resolviendo el sistema dado por la ecuación

$$\nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y las restricciones

$$g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z = 1, \quad x, y, z > 0.$$

Las tres primeras ecuaciones son

$$yz = 4\lambda x,$$

$$xz = 2\lambda y,$$

$$xy = \lambda.$$

La tercera ecuación implica $yz = 4x^2y$, $xz = 2xy^2$, por lo que $z = 4x^2 = 2y^2$ usando que $y, x > 0$. Entonces

$$g(x, y, z) = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z = 1 \implies z = \frac{1}{2}.$$

Dado que $4x^2 = 1/2$, $2y^2 = 1/2$, donde $x, y > 0$, el punto P que maximiza el volumen de la caja es

$$P = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

y el volumen máximo es $1/8\sqrt{2}$.

Ejercicio 3.

Sea S la porción del paraboloides $z + 1 = x^2 + y^2$, situada debajo del plano $z = 1$, y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, x - 2yz, x^2)$. Hallar $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$, donde \mathbf{N} es la normal exterior al paraboloides, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y mediante el teorema de Gauss.

Solución. Usando coordenadas cilíndricas, la ecuación del paraboloides es $z + 1 = x^2 + y^2 = r^2$, luego una parametrización de la superficie es

$$S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2 - 1),$$

donde $-1 \leq r^2 - 1 \leq 1$, por lo que $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2 \cos \theta, -2r^2 \sin \theta, r).$$

En el punto $S(1, 0) = (1, 0, 0)$, el vector $S_r \times S_\theta(1, 0) = (-2, 0, 1)$ apunta hacia el interior del paraboloides. Entonces, la normal exterior \mathbf{N} tiene la dirección opuesta al vector $S_r \times S_\theta$. Calculamos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ 0 & x - 2yz & x^2 \end{vmatrix} = (2y, -2x, 1).$$

En primer lugar, hallamos la integral de flujo directamente

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \mathbf{F}(S(r, \theta)) \cdot S_r \times S_\theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2r \sin \theta, -2r \cos \theta, 1) \cdot (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, -r) \, dr \, d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r \, dr \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

El teorema de Stokes afirma que $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva frontera de S orientada positivamente por la normal exterior al paraboloides \mathbf{N} . Observemos que C es la intersección de S con el plano $z = 1$. Entonces, $r^2 - 1 = 1$ implica $r = \sqrt{2}$, y una parametrización de C es

$$\mathbf{r}(\theta) = S(\sqrt{2}, \theta) = (\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sin embargo, esta parametrización de C tiene el sentido contrario a las agujas

del reloj, que es la orientación opuesta a la inducida por \mathbf{N} . En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \cos \theta - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, 2 \cos^2 \theta) \cdot (-\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, \sqrt{2} \cos \theta, 0) d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta) d\theta \\
 &= - \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} \\
 &= -2\pi.
 \end{aligned}$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T , definida por $x^2 + y^2 \leq 2$, $z = 1$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_Q \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) dx dy dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior verifica

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = - \iint_T \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x, y) = (x, y, 1)$ donde $x^2 + y^2 \leq 2$, el producto vectorial fundamental

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{N}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (2y, -2x, 1) \cdot (0, 0, 1) dx dy \\
 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx dy = -2\pi.
 \end{aligned}$$