

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 8 de Septiembre de 2008

PRIMERA PARTE

**Ejercicio 1.** Calcular el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje  $x$ , la región acotada por dicho eje y la función  $f : [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq e, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

---

**Solución.** El volumen, usando el método de los discos, es

$$V = \pi \int_0^e (x \ln x)^2 dx.$$

El cambio de variable  $t = \ln x$  implica  $x = e^t$  y  $dx = e^t dt$ , por lo que la integral se transforma en

$$V = \pi \int_{-\infty}^1 (e^t t)^2 e^t dt = \pi \int_{-\infty}^1 t^2 e^{3t} dt.$$

Usando integración por partes, con  $u = t^2$  y  $dv = e^{3t} dt$ , una primitiva es

$$\int t^2 e^{3t} dt = \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3} \int t e^{3t} dt.$$

Aplicando de nuevo integración por partes, con  $u = t$  y  $dv = e^{3t} dt$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int t^2 e^{3t} dt &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3} \left( \frac{t e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt \right) \\ &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2t e^{3t}}{9} + \frac{2e^{3t}}{27}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^{3t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{e^{-3t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t}{-3e^{-3t}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2}{9e^{-3t}} = 0.$$

Además,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{3t} = 0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{3t} = 0.$$

En consecuencia, el volumen del sólido es

$$V = \pi \left( \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2e^3}{27} \right) = \frac{5e^3}{27} \pi.$$

**Ejercicio 2.** Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{5(n+1)} \right)^n x^n,$$

determinar su radio de convergencia, estudiar la convergencia en los extremos y aproximar su suma en  $x = -1$  con un error menor que  $1/500$ .

**Solución.** Para determinar su radio de convergencia, usamos el criterio de la raíz

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{5(n+1)}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{n} = 5.$$

Entonces la serie de potencias es absolutamente convergente en el intervalo  $(-5, 5)$ . Para estudiar la convergencia en los extremos del intervalo, analizamos la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{5(n+1)} \right)^n 5^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tenemos que la serie es divergente. Si  $x = -5$ , la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{5(n+1)} \right)^n (-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n,$$

también es divergente porque la sucesión de sus términos no converge a cero.

En  $x = -1$ , la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{5(n+1)} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

es alternada porque la sucesión cuyo término general es

$$a_n = \left( \frac{n}{5(n+1)} \right)^n = \frac{1}{5^n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

es decreciente y converge a cero. Entonces, el error en la aproximación de su suma  $s$  con la suma parcial  $s_N$  verifica  $|s - s_N| \leq a_{N+1}$ . Dado que  $a_3 > 1/500$  y  $a_4 = 6.5536 \times 10^{-4} < 1/500$ , tenemos que la aproximación pedida es

$$s_3 = -a_1 + a_2 - a_3 = -\frac{1}{5(1+1)} + \left( \frac{2}{5(2+1)} \right)^2 - \left( \frac{3}{5(3+1)} \right)^3 = -8.5597 \times 10^{-2}.$$

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 8 de Septiembre de 2008

SEGUNDA PARTE

**Ejercicio 3.** Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y - z^2,$$

sobre el conjunto  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

---

**Solución.** Los puntos del conjunto  $D$  satisfacen  $z = -y$ , luego podemos resolver el problema de optimización equivalente definido mediante la función  $g(x, y) = x^2 + y - y^2$  sobre el conjunto  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto  $E$  que verifican

$$\nabla g(x, y) = (2x, 1 - 2y) = (0, 0),$$

obteniendo el punto  $P_1 = (0, 1/2) \in \text{Int } E$ . A continuación, aplicamos el criterio de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla g(x, y) = \lambda \nabla h(x, y)$$

y la restricción  $h(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ . Las dos primeras ecuaciones son

$$2x = 2\lambda x,$$

$$1 - 2y = 2\lambda y,$$

La primera ecuación implica que  $(1 - \lambda)x = 0$  por lo que  $\lambda = 1$  o bien  $x = 0$ . Si  $\lambda = 1$ , usando la segunda ecuación, tenemos que  $4y = 1$ , luego  $x^2 = 1 - 1/16 = 15/16$ . Entonces, obtenemos los puntos

$$P_2 = \left( \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4} \right) \quad \text{y} \quad P_3 = \left( -\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

Si  $x = 0$  entonces  $y^2 = 1$ , lo que proporciona dos nuevos puntos

$$P_4 = (0, 1) \quad \text{y} \quad P_5 = (0, -1).$$

Los valores de la función  $g$  en dichos puntos son

$$g(P_1) = \frac{1}{4}, \quad g(P_2) = g(P_3) = \frac{9}{8}, \quad g(P_4) = 0, \quad g(P_5) = -2,$$

luego el máximo de  $g$  se alcanza en  $P_2$  y  $P_3$ , mientras que el mínimo de  $g$  se alcanza en  $P_5$ . En consecuencia, el mínimo absoluto de  $f$  se alcanza en el punto  $(0, -1, 1) \in D$  y es  $-2$ , mientras que el máximo absoluto de  $f$  es  $9/8$ , obteniéndose en los puntos

$$\left\{ \left( \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right), \left( -\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right) \right\} \subset D.$$

**Ejercicio 4.** Sea  $S_1$  la superficie de ecuación  $z = x^2 + 2y^2$  y sea  $S_2$  la superficie de ecuación  $z = 4 - x^2$ .

- (a) Calcular el volumen del sólido  $Q$  acotado por las dos superficies.
- (b) Calcular el flujo de salida del campo vectorial  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  a través de la frontera de  $Q$ .
- (c) Calcular la integral de línea  $\oint_C F \cdot dr$ , siendo  $C$  la curva intersección de las superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

**Solución.**

(a) Dado que el sólido está acotado por  $S_1$  y  $S_2$ , para cualquier  $(x, y, z) \in Q$  se verifican las desigualdades  $x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - x^2$ , que implican

$$x^2 + 2y^2 \leq 4 - x^2 \iff x^2 + y^2 \leq 2.$$

Entonces, la descripción del sólido como  $xy$ -proyectable es

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad x^2 + 2y^2 \leq z \leq 4 - x^2\}.$$

El volumen de  $Q$  es

$$\begin{aligned} \text{vol}(Q) &= \iiint_Q dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left( \int_{x^2+2y^2}^{4-x^2} dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (4 - 2x^2 - 2y^2) dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta = 4\pi, \end{aligned}$$

usando el cambio a coordenadas polares.

(b) El teorema de la divergencia de Gauss implica que el flujo de salida a través de la frontera de  $Q$  verifica

$$\iint_{\text{Fr}(Q)} F \cdot N \, dS = \iiint_Q \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \iiint_Q 3 \, dx \, dy \, dz = 12\pi,$$

usando el resultado obtenido en el apartado (a).

(c) Observemos que la curva  $C$  es la frontera de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad z = 4 - x^2\}.$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS = \iint_S (0, 0, 0) \cdot N \, dS = 0.$$

**Nota:** El campo  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  tiene primeras derivadas parciales continuas y es conservativo en  $\mathbb{R}^3$ , con potencial  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ . Entonces, la integral de línea  $\oint_C F \cdot dr = 0$ .