CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 1 de Julio de 2009

Primera parte

Ejercicio 1.

(a) Dibujar un rectángulo inscrito en el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$, con uno de sus lados en el eje x.

(b) Calcular las dimensiones y el área del rectángulo del tipo descrito en (a) que tiene área máxima.

Solución. Los vértices de un rectángulo de este tipo son

$$(\pm x, 0), \quad \left(\pm x, \sqrt{25 - x^2}\right), \quad 0 < x < 5.$$

Entonces, el área del rectángulo es

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2},$$

donde $0 < x < 5$. Los puntos críticos del área se obtienen resolviendo la ecuación $A'(x) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}\right) \\ &= 2\left(\frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$25 - 2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{25}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $x \in (0, 5)$ el único punto crítico es $x^* = 5\,/\sqrt{2}$. Si $x \in \left(0, 5\,/\sqrt{2}\right)$ entonces $x^2 < 25\,/2$, luego $25 - 2x^2 > 0$, y la función área es creciente en el intervalo $\left(0, 5\,/\sqrt{2}\right)$. Si $x \in \left(5\,/\sqrt{2}\,, 5\right)$ tenemos que $x^2 > 25\,/2$, por lo que $25 - 2x^2 < 0$, y la función área es decreciente en el intervalo $\left(5\,/\sqrt{2}\,, 5\right)$. En consecuencia, el área máxima se alcanza en $x^* = 5\,/\sqrt{2}$. Las dimensiones y el área del rectángulo de área máxima son:

$$\textit{base} = 2x^* = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}, \quad \textit{altura} = y^* = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \qquad A^* = 25.$$

Ejercicio 2. Determinar la convergencia o divergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Solución.
En primer lugar, analizamos la convergencia de la integral impropia

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Para aplicar el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1,$$

lo que implica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

Dado que la integral $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ converge si y sólo si $\alpha > -1$, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

es convergente. Entonces, la integral I_1 es convergente.

Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx,$$

calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{e^x - 1}} = 0.$$

Dado que la integral $\int_1^\infty x^\alpha \, dx$ converge si y sólo si $\alpha < -1$, usando $\alpha = -2$, obtenemos que la integral I_2 es convergente. Como ambas integrales son convergentes, concluimos que la integral es convergente.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 1 de Julio de 2009

Segunda parte

Ejercicio 3. Dada la integral iterada

$$\int_0^1 \int_1^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Transformar la integral a coordenadas polares.

(c) Calcular dicha integral.

Solución.

(a) La región de integración es la porción del semicírculo $x^2+y^2 \le 2$, $y \ge 0$, situada a la derecha de la recta $x = 1$, es decir con $x \ge 1$.

(b) Transformando a coordenadas polares, tenemos que $r \le \sqrt{2}$ y $r\cos\theta \ge 1$, por lo que

$$\frac{1}{\cos\theta} \le r \le \sqrt{2}.$$

La intersección de la recta $x = 1$ con la semicircunferencia $x^2+y^2 = 2$, $y \ge 0$, es el punto $(1,1)$, por lo que el ángulo $0 \le \theta \le \pi/4$. Además

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Entonces la integral en coordenadas polares es

$$\int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} \frac{\cos\theta}{r}\, r\,dr\,d\theta.$$

(c) Calculamos la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} \cos\theta\,dr\,d\theta &= \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right)\,d\theta \\
&= \left[\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta - \theta\right]_0^{\pi/4} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea S la porción del elipsoide $x^2+y^2+3z^2=1$, situada encima del plano $z=0$ y sea $F(x,y,z)=\left(x+y^3, 2y-e^z, -3z-1\right)$. Calcular el flujo de F a través de S en la dirección exterior al elipsoide.

Solución. Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T, definida por $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S\cup T} F\cdot N\,dS = \iiint_{Q} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz.$$

Calculamos la divergencia del campo vectorial

$$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z = 1+2-3=0$$

Entonces el flujo exterior de F a través de S verifica

$$\iint_{S} F\cdot N\,dS = -\iint_{T} F\cdot N\ dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x,y)=(x,y,0)$ donde $x^2+y^2\leq 1$, el vector normal con orientación exterior es $N=(0,0,-1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\iint_{S} F\cdot N\,dS &= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(x+y^3, 2y-1, -1\right)\cdot(0,0,-1)\ dx\,dy\\ &= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} dx\,dy\\ &= -\pi.\end{aligned}$$