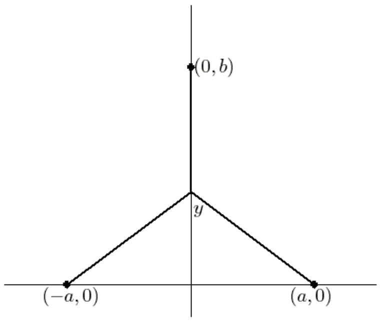
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2009

Ejercicio 1. Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ con suministro eléctrico ubicado en $(0, b)$. Determinar el punto $(0, y)$ de manera tal que longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas sea un mínimo.



Solución. La longitud total de la línea de transmisión eléctrica $L(y)$ es

$$L(y) = b - y + 2\sqrt{a^2 + y^2}$$

Debemos calcular el mínimo de esta función cuando $y \in [0, b]$. Los puntos críticos de esta función son la soluciones de $L'(y) = 0$ en el intervalo $(0, b)$. Resolvemos la ecuación

$$L'(y) = -1 + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0 \Rightarrow 2y = \sqrt{a^2 + y^2} \Rightarrow 3y^2 = a^2,$$

siendo $y = a \big/ \sqrt{3}$ la única solución en el intervalo $(0, b)$. Observemos que $L'(y) < 0$ si $y < a \big/ \sqrt{3}$ y que $L'(y) > 0$ si $y > a \big/ \sqrt{3}$, luego la función es decreciente en el intervalo $\left(0, a \big/ \sqrt{3}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(a \big/ \sqrt{3}, \infty\right)$. Ahora, distinguiremos dos casos:

1. Si el punto crítico $a \big/ \sqrt{3} < b$, entonces, por el razonamiento anterior, el mínimo se alcanza en el punto $\left(0, a \big/ \sqrt{3}\right)$.

2. Si $b \leq a \big/ \sqrt{3}$, la función $L(y)$ no tiene puntos críticos en el intervalo $(0, b)$. Como la función es decreciente en el intervalo $\left(0, a \big/ \sqrt{3}\right)$, en particular lo será en el el intervalo $[0, b]$ y el mínimo se alcanza en el punto $(0, b)$.

Ejercicio 2. La base de un sólido es un círculo de radio r y sus secciones transversales verticales son triángulos equiláteros. Sabiendo que el volumen del sólido es 10 metros cúbicos, encontrar el radio del círculo.

Solución. Un triángulo equilátero de lado l tiene altura

$$h = l \operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, su área es

$$A = \frac{1}{2} bh = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Como la base del sólido es un círculo de radio r, suponemos que su centro es el origen del sistema de referencia. En este caso el borde del círculo es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces, la sección transversal es un triángulo equilátero de lado $l(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, donde $x \in [-r, r]$, siendo el área de la sección transversal vertical

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}{4} = \sqrt{3}\left(r^2 - x^2\right).$$

Para calcular el volumen, sólo tenemos que integrar las secciones transversales entre $-r$ y r.

$$V = \int_{-r}^{r} \sqrt{3}\left(r^2 - x^2\right) dx = \sqrt{3}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4r^3}{\sqrt{3}}.$$

Dado que el volumen del sólido es $V = 10$, resolvemos la ecuación

$$\frac{4r^3}{\sqrt{3}} = 10,$$

obteniendo

$$r = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{2}}.$$

Ejercicio 3.
(i) Calcular la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln(1-x^2)$, así como su dominio de convergencia.
(ii) Dada la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$, estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución. (i) La derivada de la función $f(x) = \ln(1-x^2)$ es

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2},$$

y sabemos que el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$$

Entonces, el desarrollo en serie de Maclaurin de la derivada

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Integrando, obtenemos

$$f(x) = \ln(1-x^2) = C - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2},$$

cuyo dominio de convergencia es, al menos, el intervalo $(-1,1)$. En particular, para $x=0$, obtenemos $C=0$. En los puntos terminales $x=-1$ y $x=1$, se obtiene la serie $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, que es divergente por ser la opuesta de la serie armónica. Por lo tanto, la serie de Maclaurin pedida es

$$f(x) = \ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

(ii) Aplicando el criterio del cociente a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$, obtenemos

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+2)\,3^{n+2}}}{\dfrac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3\,(n+2)} = \frac{1}{3} < 1,$$

por lo que la serie es convergente. Usando el apartado (i), concluimos que su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2}}{(n+1)}$$
$$= -\ln(1-\frac{1}{3}) = -\ln(\frac{2}{3}) = \ln(\frac{3}{2}).$$