

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación  
Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2009

### Ejercicio 1.

- (a) Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Hallar el plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, 0, -1)$ .  
(c) Calcular la distancia mínima del punto  $(1, 0, 1)$  al plano tangente obtenido en (b), usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

---

### Solución.

- (a) Los puntos críticos de la función se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} f_x &= 3e^y - 3x^2 = 0, \\ f_y &= 3xe^y - 3e^{3y} = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la primera ecuación  $e^y = x^2$  en la segunda, tenemos que  $x^3 = x^6$ , luego  $x^3(x^3 - 1) = 0$ . Dado que  $x^2 = e^y > 0$ , el valor  $x = 0$  no es solución del sistema. Por tanto  $x = 1$ ,  $y = 0$  es el único punto crítico de la función. Para clasificarlo, calculamos  $f_{xx} = -6x$ ,  $f_{xy} = 3e^y = f_{yx}$ ,  $f_{yy} = 3xe^y - 9e^{3y}$ , por lo que el determinante

$$H(1, 0) = \det \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Dado que la entrada  $a_{11} = -6 < 0$ , concluimos que  $f$  tiene un máximo local en  $(1, 0)$ .

(b) El punto  $(0, 0, -1)$  pertenece a la gráfica de  $f$  porque  $f(0, 0) = -1$ . Dado que  $f_x(0, 0) = 3$  y  $f_y(0, 0) = -3$ , la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0, 0, -1)$  es  $z + 1 = 3x - 3y$ , es decir  $3x - 3y - z = 1$ .

(c) Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange a la función cuadrado de la distancia al punto  $(1, 0, 1)$  definida por

$$h(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2,$$

sujeta a la restricción  $g(x, y, z) = 3x - 3y - z = 1$ . El sistema  $\nabla h = \lambda \nabla g$  es

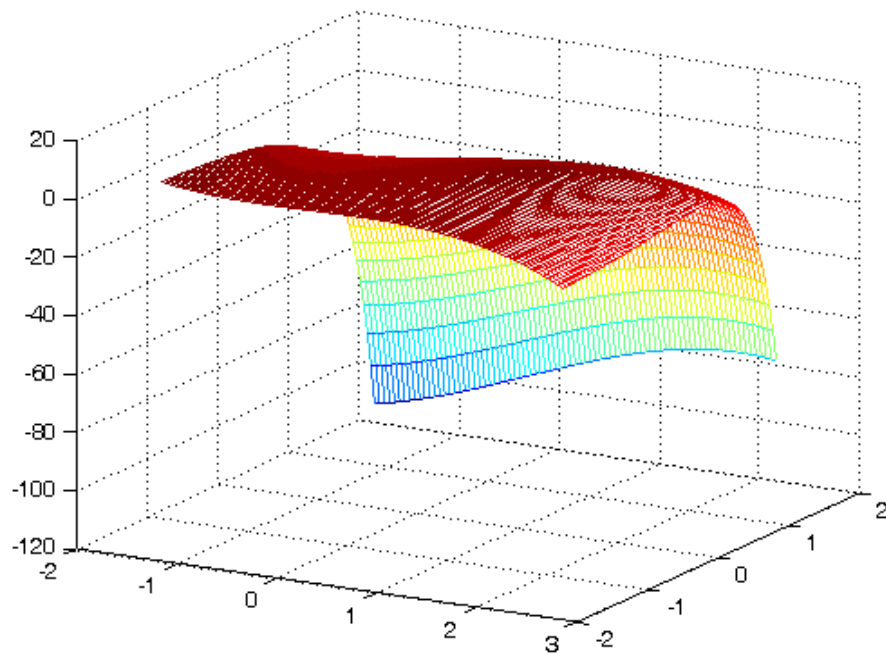
$$\begin{aligned} 2(x - 1) &= 3\lambda, \\ 2y &= -3\lambda, \\ 2(z - 1) &= -\lambda. \end{aligned}$$

Entonces,  $x - 1 = -y = -3(z - 1)$ , lo que implica  $x = 1 - y$ ,  $z = y/3 + 1$ .  
Sustituyendo en la restricción  $3x - 3y - z = 1$ , obtenemos

$$3(1 - y) - 3y - \left(\frac{y}{3} + 1\right) = 1 \iff \frac{19}{3}y = 1 \iff y = \frac{3}{19},$$

por lo que  $x = 16/19$  y  $z = 20/19$ . El punto del plano más cercano a  $(1, 0, 1)$  es  $(16/19, 3/19, 20/19)$  y la distancia mínima es

$$h^* = \sqrt{\left(\frac{16}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{19}\right)^2 + \left(\frac{20}{19} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$



**Ejercicio 2.**

Sea  $R$  el paralelogramo limitado por las rectas  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = 4$ ,  $3x - y = 1$ ,  $3x - y = 8$ . Calcular la integral doble

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dx dy.$$

---

**Solución.** Definimos dos nuevas variables  $u = x - 2y$ ,  $v = 3x - y$ . Aplicando el teorema del cambio de variable,

$$\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dx dy = \int_0^4 \int_1^8 \frac{u}{v} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Calculamos el determinante jacobiano del cambio inverso

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 5,$$

por lo que el determinante jacobiano del cambio de variable es

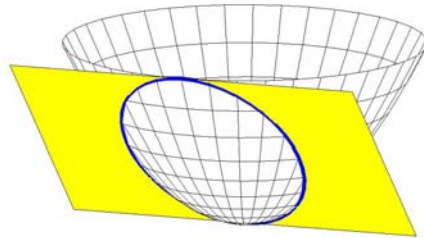
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x - 2y}{3x - y} dx dy &= \frac{1}{5} \left( \int_0^4 u du \right) \left( \int_1^8 \frac{1}{v} dv \right) \\ &= \frac{1}{5} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^4 [\ln v]_1^8 \\ &= \frac{8}{5} \ln 8 \\ &= \frac{24}{5} \ln 2. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.**

Sea  $S$  la porción del paraboloide  $z = x^2 + y^2$ , que está por debajo del plano  $z = x$ , y sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xz, x, y^2)$ . Hallar el flujo  $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ , donde  $\mathbf{N}$  es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y usando el teorema de Gauss.




---

**Solución.** En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -xz & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, -x, 1).$$

Parametrizamos la superficie  $S$  mediante  $S(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , donde  $x^2 + y^2 \leq x$ . El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1).$$

En el punto  $S(0, 0) = (0, 0, 0)$ , el vector  $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$  apunta hacia el interior del paraboloide. Entonces, la normal exterior  $\mathbf{N}$  tiene la *dirección opuesta* al vector  $S_x \times S_y$ .

Calculamos directamente el flujo exterior

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= - \iint_{x^2 + y^2 \leq x} (2y, -x, 1) \cdot (-2x, -2y, 1) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq x} (2xy - 1) dx dy. \end{aligned}$$

Para calcular esta integral doble, usamos coordenadas polares, por lo que el recinto de integración es

$$\left\{ (r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta \right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \iint_{x^2+y^2 \leq x} (2xy - 1) \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (2r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 1) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^4}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \frac{r^2}{2} \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^5 \theta \operatorname{sen} \theta - \cos^2 \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left[ -\frac{\cos^6 \theta}{6} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Stokes, el flujo exterior

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde  $C$  es la curva frontera de  $S$  orientada positivamente por la normal exterior al paraboloido  $\mathbf{N}$ . Observemos que  $C$  es la intersección del plano  $z = x$  con el cilindro

$$x^2 + y^2 = x \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Parametrizamos la curva  $C$  mediante

$$r(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dado que  $r(0) = (1, 0, 1)$  y  $r(\pi/2) = (1/2, 1/2, 1/2)$  la curva  $C$  tiene la orientación opuesta a la inducida por  $\mathbf{N}$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t) \, dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{4} (1 + \cos t)^2, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 t \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t, \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right) dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{8} (1 + \cos t)^2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{4} (1 + \cos t) \cos t - \frac{1}{8} \operatorname{sen}^3 t \right) dt \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = -\frac{1}{4} \left[ \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Si consideramos el sólido  $Q$  cuyas fronteras son  $S$  y la superficie  $T$ , definida por  $x^2 + y^2 \leq x$ ,  $z = x$ , el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior verifica

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = - \iint_T \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Si definimos la parametrización  $T(x, y) = (x, y, x)$  donde  $x^2 + y^2 \leq x$ , el producto vectorial fundamental

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= - \iint_{x^2+y^2 \leq x} (2y, -x, 1) \cdot (-1, 0, 1) \, dx \, dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq x} (1 - 2y) \, dx \, dy \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \theta} (1 - 2r \text{sen } \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{2}{3} r^3 \text{sen } \theta \right]_0^{\cos \theta} d\theta \\ &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos^2 \theta}{2} - \frac{2}{3} \cos^3 \theta \text{sen } \theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen } 2\theta}{4} + \frac{4 \cos^4 \theta}{3 \cdot 4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$