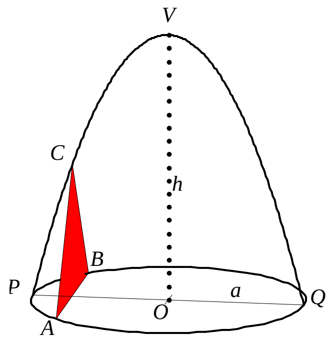
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen de 1 de Septiembre de 2009

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. En un círculo de radio a se toma un diámetro POQ. Sobre la perpendicular al círculo en el punto O y a una altura h se encuentra el punto V. Consideremos la parábola con vértice en el punto V y que pasa por P y Q. Sea el triángulo de vértices A, B, C, donde A y B están sobre el círculo y C sobre la parábola, todos ellos en un plano perpendicular al diámetro POQ. Calcular el volumen del sólido generado al mover el triángulo ABC desde P hasta Q.



Solución. Elegimos un sistema cartesiano de coordenadas con centro en el punto O, eje x que contiene el diámetro POQ, eje y en el plano que contiene el círculo de radio a y eje z que contiene el segmento OV. En primer lugar, obtenemos la ecuación de la parábola PVQ. A partir de la ecuación general de una parábola $y(x) = px^2 + qx + r$, su vértice verifica $y(0) = r = h$ y además $y'(0) = q = 0$. Entonces $y(x) = px^2 + h$. Dado que la parábola pasa por los puntos $P = (-a, 0)$ y $Q = (a, 0)$, tenemos que

$$y(\pm a) = pa^2 + h = 0 \Longrightarrow p = -\frac{h}{a^2}.$$

Por tanto, la ecuación de la parábola, que coincide con la altura del triángulo ABC, es

$$y(x) = -\frac{h}{a^2}x^2 + h, \quad -a \leq x \leq a.$$

Observemos que la base del triángulo ABC es la distancia entre los puntos del círculo $x^2+y^2=1$, cuyas coordenadas son $\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ y $\left(x,-\sqrt{a^2-x^2}\right)$. Es decir, la base es $2\sqrt{a^2-x^2}$. En consecuencia, el área de la sección triangular es

$$A(x)=\sqrt{a^2-x^2}\left(h-\frac{h}{a^2}x^2\right)=\frac{h}{a^2}\left(a^2-x^2\right)^{3/2},\quad -a\leq x\leq a.$$

El volumen del sólido generado al mover el triángulo ABC, desde P hasta Q, se obtiene integrando el área de las secciones triangulares

$$\begin{aligned}V&=\int_{-a}^{a}A(x)\,dx=\frac{h}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{2h}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx\\&=\frac{2h}{a^2}\int_0^{\pi/2}a^4\cos^4\theta\,d\theta=2ha^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta,\end{aligned}$$

usando el cambio de variable $x=a\operatorname{sen}\theta,\ -\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$. Para encontrar una primitiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\cos^4\theta&=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)\\&=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\\&=\frac{1}{8}\left(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right).\end{aligned}$$

Así concluimos que el volumen es

$$\begin{aligned}V&=\frac{2ha^2}{8}\int_0^{\pi/2}\left(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right)d\theta\\&=\frac{ha^2}{4}\left[3\theta+2\operatorname{sen}2\theta+\frac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}\\&=\frac{ha^2}{4}\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi ha^2.\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Hallar la serie de Maclaurin para la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

determinando su radio de convergencia.

Solución. Derivando la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

Entonces la serie de Maclaurin es

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad -1 < x < 1.$$

El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

por lo que la serie es absolutamente convergente en el intervalo $(-1, 1)$. En los extremos $x = -1$ y $x = 1$, las series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ \text{ y } \ \sum_{n=1}^{\infty} n$$

son divergentes porque no cumplen la condición necesaria de convergencia.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 1 de Septiembre de 2009
SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x + y^2,$$

sobre el disco unidad $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Solución. En primer lugar, determinamos los puntos del interior del conjunto D, es decir $x^2 + y^2 < 1$, que verifican

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - \frac{1}{4}, 2y\right) = (0,0),$$

obteniendo los puntos críticos $P_1 = (-1/2\,,0)$ y $P_2 = (1/2\,,0)$, que pertenecen al interior de D. Para analizarlos, calculamos la matriz hessiana

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En los puntos P_1 y P_2, dicha matriz es

$$H(-1/2\,,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(1/2\,,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto P_1 el determinante es -2, luego f tiene un punto de silla y en dicho punto no se alcanzan los valores extremos de f. En el punto P_2 el determinante es 2 y $f_{xx} = 1 > 0$, por lo que f tiene un mínimo local en P_2.

Para analizar la función en el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange, resolviendo el sistema dado por

$$\nabla f(x,y) = \lambda\, \nabla g(x,y)$$

y la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$. Las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{4} &= 2\lambda x, \\ 2y &= 2\lambda y, \end{aligned}$$

La segunda ecuación implica que $(1-\lambda)\,y = 0$ por lo que $\lambda = 1$ o bien $y = 0$. Si $\lambda = 1$, usando la primera ecuación, tenemos que $x^2 - 2x - 1/4 = 0$, luego

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Usando la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tenemos

$$x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \left(1 - \sqrt{5} + \frac{5}{4}\right) = \sqrt{5} - \frac{5}{4} > 0,$$
$$x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \left(1 + \sqrt{5} + \frac{5}{4}\right) = -\sqrt{5} - \frac{5}{4} < 0.$$

Dado que la segunda desigualdad $y^2 < 0$ es imposible, el único valor de x es el primero. Así obtenemos los puntos

$$P_3 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\sqrt{5} - \frac{5}{4}}\right) \quad \text{y} \quad P_4 = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\sqrt{5} - \frac{5}{4}}\right).$$

Si $y = 0$ entonces la ecuación de la restricción implica que $x^2 = 1$, lo que proporciona dos nuevos puntos

$$P_5 = (1, 0) \ \text{ y } \ P_6 = (-1, 0).$$

Los valores de la función f en dichos puntos son

$$f(P_2) = -\frac{1}{12}, \ \ f(P_3) = f(P_4) \approx 1.01503, \ \ f(P_5) = \frac{1}{12}, \ \ f(P_6) = -\frac{1}{12}$$

luego el máximo absoluto de f se alcanza en P_3 y P_4, mientras que el mínimo absoluto de f se alcanza en P_2 y P_6.

Ejercicio 4. Dada la región plana

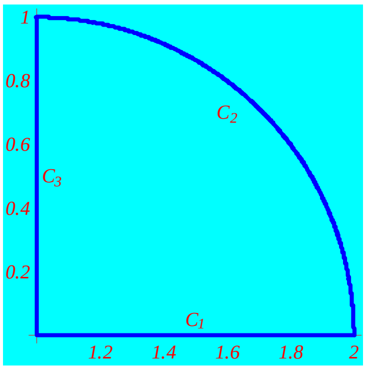
$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, \;\; x \geq 1 \right\},$$

sea C la curva frontera de R con orientación positiva. Calcular la integral

$$\oint_C -y^2 \, dx + x \, dy,$$

directamente y usando el teorema de Green.

Solución.



La curva frontera de R con orientación positiva verifica $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 se parametriza con $r_1(t) = (t, 0)$, $1 \leq t \leq 2$. Observemos que C_2 es el trozo de la circunferencia

$$y^2 = 2x - x^2 \iff x^2 - 2x + y^2 = 0 \iff (x-1)^2 + y^2 = 1$$

tal que $x \geq 1$, $y \geq 0$. Entonces $r_2(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, es una parametrización de C_2. Finalmente, parametrizamos C_3 mediante $r_3(t) = (1, 1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$. Calculamos las integrales de línea

$$\int_{C_1} -y^2 \, dx + x \, dy = \int_1^2 0 \, dt = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} -y^2 \, dx + x \, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[-\operatorname{sen}^2 t \, (-\operatorname{sen} t) + (1 + \cos t) \cos t \right] \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t + \cos t \right) \, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\left(1 - \cos^2 t\right) \operatorname{sen} t + \frac{1 + \cos 2t}{2} + \cos t \right] \, dt \\
&= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/2} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

$$\int_{C_3} -y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 -dt = -1.$$

En consecuencia, el valor de la integral es

$$\oint_C -y^2\,dx + x\,dy = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(Q_x - P_y\right)\,dx\,dy.$$

La región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\;\; 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\right\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\oint_C -y^2\,dx + x\,dy &= \iint_R \left(1 + 2y\right)\,dx\,dy \\
&= \iint_R dx\,dy + \iint_R 2y\,dx\,dy \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} 2y\,dy\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left[y^2\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \left(2x - x^2\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$