

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2010

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Sea L la recta tangente a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto (a, b) tal que $\ln a > 1$. Sea $(0, c)$ el punto en el que L corta al eje y .

- (i) Calcular la distancia ente los puntos $(0, b)$ y $(0, c)$.
- (ii) Hallar el área de la región acotada por el eje x , el eje y , la recta L y la gráfica de $y = \ln x$.

Solución. (i) La ecuación de la recta L es

$$y - b = \frac{1}{a} (x - a).$$

La coordenada c del punto en el que L corta al eje y verifica

$$c - b = \frac{1}{a} (0 - a),$$

por lo que $c = b - 1$. Entonces, la distancia ente los puntos $(0, b)$ y $(0, c)$ es $b - c = 1$.

(ii) El área de la región acotada por el eje x , el eje y , la recta $y = b$ y la gráfica de $x = e^y$ menos el área del triángulo con vértices (a, b) , $(0, b)$ y $(0, c)$, es el área pedida. Entonces

$$A = \int_0^b e^y dy - \frac{a}{2} = e^b - 1 - \frac{a}{2} = a - 1 - \frac{a}{2} = \frac{a - 2}{2},$$

porque $b = \ln a \Leftrightarrow e^b = a$.

Ejercicio 2.

- (i) Derivación e integración de series de potencias.
- (ii) Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 5^n}.$$

Solución. Integrando la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1,$$

obtenemos

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Entonces, la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 5^n} = \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 5 de Julio de 2010

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z,$$

sobre el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y + z = 1\}$.

Solución. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, calculamos los extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y, z) = y + z - 1 = 0$. Resolvemos el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, dado por

$$2x + 1 = 0,$$

$$2y + 1 = \lambda,$$

$$2z + 1 = \lambda.$$

La solución es $x = -1/2$, $y = z$, por lo que la restricción $y + z = 1$ implica $y = z = 1/2$. Dado que el punto $P_1 = (-1/2, 1/2, 1/2)$ satisface la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, hemos obtenido un candidato a extremo.

A continuación, obtenemos los extremos de f con las restricciones

$$g(x, y, z) = y + z - 1 = 0,$$

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Para ello resolvemos el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, dado por

$$2x + 1 = 2\mu x,$$

$$2y + 1 = \lambda + 2\mu y,$$

$$2z + 1 = \lambda + 2\mu z.$$

Restando la tercera ecuación de la segunda

$$y - z = \mu(y - z) \iff (y - z)(1 - \mu) = 0 \iff \mu = 1 \text{ o bien } y = z.$$

Si $\mu = 1$ entonces la primera ecuación es $2x + 1 = 2x$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y = z$, lo que implica, usando $y + z = 1$, que $y = z = 1/2$. La segunda restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implica que $x^2 = 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2$. En consecuencia, obtenemos los puntos $P_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2)$ y $P_3 = (1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2)$.

Finalmente, evaluamos los valores de f en los tres puntos obtenidos

$$f(P_1) = f(-1/2, 1/2, 1/2) = 3/4 + 1/2 = 5/4 = 1.25,$$

$$f(P_2) = f(-1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2) = 2 - 1/\sqrt{2} \approx 1.29289,$$

$$f(P_3) = f(1/\sqrt{2}, 1/2, 1/2) = 2 + 1/\sqrt{2} \approx 2.70710.$$

En consecuencia, el máximo absoluto se alcanza en P_3 y el mínimo absoluto en P_1 .

Ejercicio 4. Sea S la porción del paraboloido $z = 2 - x^2 - y^2$ que se encuentra en el interior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (y, 2x, zx)$, calcular el flujo exterior del campo $\text{rot } F$ a través de S , directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.

Solución. La intersección del paraboloido $z = 2 - x^2 - y^2$ con el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ verifica $z = 2 - z^2$ con $z \geq 0$. La solución de la ecuación $z^2 + z - 2 = 0$ es

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}.$$

Por tanto, la intersección es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, contenida en el plano $z = 1$. Como los puntos de la superficie S están en el interior del cono, sus coordenadas verifican $1 \leq z = 2 - x^2 - y^2 \leq 2$, lo que implica $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Entonces, elegimos la parametrización

$$S(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2) \quad \text{donde } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1).$$

En el punto $S(0, 0) = (0, 0, 2)$, el vector $S_x \times S_y(0, 0) = (0, 0, 1)$ apunta hacia el exterior del paraboloido. A continuación, calculamos el rotacional del campo F ,

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & 2x & zx \end{vmatrix} = (0, -z, 1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{rot } F(S(x, y)) \cdot (S_x \times S_y) &= (0, x^2 + y^2 - 2, 1) \cdot (2x, 2y, 1) \\ &= (x^2 + y^2 - 2)2y + 1. \end{aligned}$$

El flujo exterior del campo $\text{rot } F$ a través de S es

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [(x^2 + y^2 - 2) 2y + 1] \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(r^2 - 2) 2r \text{sen } \theta + 1] r \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 [2r^2 (2 - r^2) \cos \theta + r\theta]_0^{2\pi} \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde C es la curva frontera de S , es decir, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, contenida en el plano $z = 1$. Parametrizamos C mediante

$$c(\theta) = (\cos \theta, \text{sen } \theta, 1) \quad \text{donde } \theta \in [0, 2\pi].$$

Observemos que la orientación inducida por la normal exterior al paraboloides coincide con la orientación de C . Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F[c(\theta)] \cdot c'(\theta) \, d\theta &= \int_0^{2\pi} (\text{sen } \theta, 2 \cos \theta, \cos \theta) \cdot (-\text{sen } \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\cos 2\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + 3 \cos 2\theta}{2} \right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3 \text{sen } 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Si consideramos el sólido Q cuyas fronteras son S y la superficie T , definida por $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$, el teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint_{S \cup T} \text{rot } F \cdot N \, dS = \iiint_Q \text{div rot } F \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Entonces el flujo exterior de $\text{rot } F$ a través de S verifica

$$\iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS = - \iint_T \text{rot } F \cdot N \, dS.$$

Si definimos la parametrización $T(x, y) = (x, y, 1)$ donde $x^2 + y^2 \leq 1$, el vector normal con orientación exterior es $N = (0, 0, -1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F \cdot N \, dS &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, -1, 1) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = \pi. \end{aligned}$$