

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Primer Examen Parcial. 4 de Febrero de 2010

Ejercicio 1. Se considera un circuito de carreras compuesto por dos tramos rectos paralelos de la misma longitud, unidos en ambos extremos por sendas semicircunferencias. Si la longitud total del circuito es L , determinar sus dimensiones de modo que el área del rectángulo central sea máxima. ¿Qué ocurre si se desea maximizar el área total?

Solución. Sea x la longitud de cada tramo recto y sea d el diámetro de la semicircunferencia. Entonces, la longitud total del circuito es $L = 2x + \pi d$, lo que implica que

$$d = \frac{L - 2x}{\pi}.$$

El área del rectángulo central es

$$A(x) = dx = \frac{Lx - 2x^2}{\pi}, \quad x \in (0, L/2).$$

Los puntos críticos de esta función son la soluciones de $A'(x) = 0$ en el intervalo $(0, L/2)$. Resolvemos la ecuación

$$A'(x) = \frac{L - 4x}{\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4}.$$

Observemos que $A'(x) > 0$ si $x < L/4$ y que $A'(x) < 0$ si $x > L/4$, luego la función es creciente en el intervalo $(0, L/4)$ y decreciente en el intervalo $(L/4, L/2)$. Por tanto, con las dimensiones $x = L/4$ y $d = L/2\pi$ el área del rectángulo central es máxima.

El área total de la región cuya frontera es el circuito viene dada por

$$\begin{aligned} T(x) &= dx + \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Lx - 2x^2}{\pi} + \pi \left(\frac{L - 2x}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{Lx - 2x^2}{\pi} + \frac{L^2 - 4Lx + 4x^2}{4\pi} = \frac{L^2 - 4x^2}{4\pi}, \end{aligned}$$

donde $x \in (0, L/2)$. Calculamos

$$T'(x) = -\frac{8x}{4\pi} = -\frac{2x}{\pi} < 0,$$

para todo $x > 0$. Entonces, el área total es una función decreciente en el intervalo abierto $(0, L/2)$ por lo que no existen máximos ni mínimos en dicho intervalo.

Ejercicio 2. Hallar el valor real a que hace convergente la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{a}{2x + 1} \right) dx,$$

y calcular el valor de la integral.

Solución. El integrando verifica

$$\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{a}{2x + 1} = \frac{(4 - a)x^2 + 2x - a}{(x^2 + 1)(2x + 1)} = \frac{2x - 4}{(x^2 + 1)(2x + 1)}$$

para el valor $a = 4$. Descomponemos la integral impropia para $a = 4$ mediante

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4}{2x + 1} \right) dx &= \int_0^1 \frac{2x - 4}{(x^2 + 1)(2x + 1)} dx \\ &\quad + \int_1^{\infty} \frac{2x - 4}{(x^2 + 1)(2x + 1)} dx, \end{aligned}$$

El criterio de comparación por límites (cuando $x \rightarrow \infty$) implica que la integral impropia tiene el mismo carácter que la integral convergente

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Calculamos el valor de la integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{4}{2x + 1} \right) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x^2 + 1) - 2 \ln(2x + 1)]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b^2 + 1}{(2b + 1)^2} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2 + 1}{(2b + 1)^2} \right) \\ &= \ln \frac{1}{4} \\ &= -2 \ln 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

(a) Obtener la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia.

(b) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1}{2^n} \right] \frac{1}{5^n},$$

estudiar su carácter y calcular su suma.

Solución. (a) El desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$\frac{2}{x-2} = \frac{-1}{1-x/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n, \quad x \in (-2, 2).$$

Observemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

donde $x \in (-1, 1)$. Sumando los desarrollos obtenidos, tenemos que

$$\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1}{2^n} \right] x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

(b) La serie numérica es el valor de la serie de Maclaurin en $x = 1/5 \in (-1, 1)$, por lo que es convergente y su suma es

$$\frac{2}{1/5-2} + \frac{1}{(1-1/5)^2} = \frac{65}{144} \approx 0.4513889$$