

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 16 de Junio de 2010

Ejercicio 1.

Hallar los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

Solución. Aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange a la función dada por el cuadrado de la distancia al punto $(4, 2, 0)$, es decir,

$$f(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + z^2,$$

sujeta a la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

El sistema de ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ es

$$\begin{aligned}2(x - 4) &= 2\lambda x, \\2(y - 2) &= 2\lambda y, \\2z &= -2\lambda z.\end{aligned}$$

La tercera ecuación del sistema es $(1 + \lambda)z = 0$, lo que implica que $z = 0$, o bien $\lambda = -1$. Si $z = 0$, sustituyendo en la restricción $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, obtenemos $x^2 + y^2 = 0$, lo que implica $x = y = 0$, que contradice las dos primeras ecuaciones.

Por tanto, $\lambda = -1$. Para este valor, las dos primeras ecuaciones son $x - 4 = -x$, $y - 2 = -y$, cuya única solución es $x = 2$, $y = 1$. Usando la restricción, obtenemos $z^2 = x^2 + y^2 = 5$.

Entonces, los puntos del cono más cercanos al punto $(4, 2, 0)$ son $(2, 1, \sqrt{5})$ y $(2, 1, -\sqrt{5})$.

Ejercicio 2.

Sea V el sólido definido mediante las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Calcular la integral triple

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz.$$

Solución. Usando coordenadas esféricas, las desigualdades que definen el sólido son $0 \leq \text{sen } \phi \leq \cos \phi$, $0 \leq \rho \cos \phi \leq 2$. Entonces

$$V = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/4, \quad 0 \leq \rho \leq 2/\cos \phi\}.$$

Cambiando a coordenadas esféricas, la integral triple verifica

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2/\cos \phi} \rho^3 \rho^2 \text{sen } \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^{2/\cos \phi} \text{sen } \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\text{sen } \phi}{\cos^6 \phi} d\phi d\theta \\ &= \frac{2^5}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{5 \cos^5 \phi} \right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \frac{2^5}{15} \int_0^{2\pi} \left[(\sqrt{2})^5 - 1 \right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \frac{2^5}{15} (4\sqrt{2} - 1) 2\pi \\ &= \frac{64(4\sqrt{2} - 1)}{15} \pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Calcular la integral de línea

$$\oint_C e^{x^2} dx + (x+z) \operatorname{sen} y^3 dy + (y^2 - x^2 + 2yz) dz,$$

siendo C la curva obtenida por la intersección del plano $x + y + z = 3$ con los planos coordenados, indicando la orientación de C elegida.

Solución. El teorema de Stokes asegura que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$, donde S es el triángulo contenido en el plano $x + y + z = 3$ cuya frontera es la curva C . Elegimos la orientación positiva inducida por el vector normal de la ecuación implícita del plano, es decir $\mathbf{N} = (1, 1, 1)$. Calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ e^{x^2} & (x+z) \operatorname{sen} y^3 & y^2 - x^2 + 2yz \end{vmatrix} \\ &= (2y + 2z - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3). \end{aligned}$$

La superficie S se define mediante $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Usando la parametrización $S(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$, donde $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$, el producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Observemos que el vector normal elegido coincide con $S_x \times S_y$. Calculamos el flujo

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_T (6 - 2x - \operatorname{sen} y^3, 2x, \operatorname{sen} y^3) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\ &= 6 \iint_T dx dy = 6 \text{ área}(T), \end{aligned}$$

donde $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$ es un triángulo con base 3 y altura 3. Entonces, la integral de línea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 6 \times \frac{9}{2} = 27.$$