CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segunda Convocatoria, 8 de Septiembre de 2010

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un operario taladra un orificio con un radio r a través del centro de una esfera de metal de radio R.

(a) Encontrar el volumen del anillo esférico resultante.

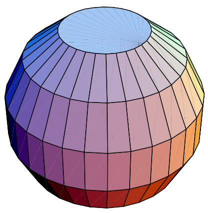
(b) Si $R = 5$, calcular el valor de r tal que el volumen del anillo esférico sea la mitad del volumen de la esfera.

Solución:

(a) Usando la simetría del anillo esférico, podemos generar la mitad de dicho anillo girando alrededor del eje y la región comprendida entre el segmento $x = r$, la porción de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ situada en el primer cuadrante y el eje x.

Mediante el método de las capas, el volumen del anillo es

$$V = 4\pi \int_r^R x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 4\pi \left[-\frac{1}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R = \frac{4\pi}{3} \left(R^2 - r^2\right)^{3/2}.$$



(b) Si $R = 5$, la mitad del volumen de la esfera es $2\pi 5^3/3$. Entonces

$$\frac{2\pi 5^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \left(5^2 - r^2\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{5^3}{2}\right)^{2/3} = 5^2 - r^2 \Leftrightarrow r = 5\sqrt{1 - \frac{1}{2^{2/3}}}.$$

Ejercicio 2. Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

Solución. El radio de convergencia de la serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^n}{n}}{\dfrac{3^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3},$$

La serie converge absolutamente en el intervalo abierto $|x-2| < 1/3$. Estudiamos la convergencia en los puntos terminales $x-2 = -1/3$ y $x-2 = 1/3$. En el primero, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es convergente por el criterio de Leibnitz. En el segundo punto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente por el criterio integral. En consecuencia, la serie es convergente en el intervalo $-1/3 \leq x-2 < 1/3 \Longleftrightarrow 5/3 \leq x < 7/3$.

Para sumar la serie, definimos $z = 3(x-2)$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

para $z \in [-1, 1)$. La derivada de esta serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad -1 < z < 1.$$

Integrando ambos términos, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z), \quad -1 < z < 1,$$

lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n} = -\ln(1-3(x-2)) = -\ln(7-3x), \quad \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}.$$

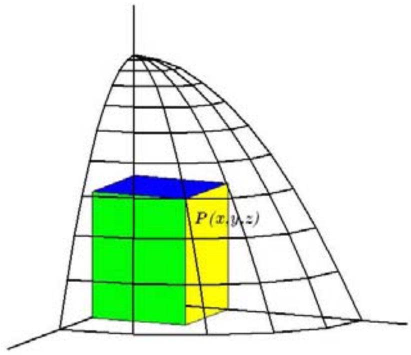
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segunda Convocatoria, 8 de Septiembre de 2010

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x, y, z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloide de ecuación $x^2+y^2+z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



Solución. Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange al volumen $V(x, y, z) = xyz$, resolviendo el sistema dado por la ecuación $\nabla V(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, donde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Las tres primeras ecuaciones son

$$
\begin{aligned}
yz &= 2\lambda x,\\
xz &= 2\lambda y,\\
xy &= \lambda.
\end{aligned}
$$

La tercera ecuación implica que $yz = 2x^2 y$, $xz = 2xy^2$. Usando que $y > 0$, $x > 0$, obtenemos $z = 2x^2 = 2y^2$.

Entonces $g(x, y, z) = z/2 + z/2 + z = 1$, por lo que $z = 1/2$. Dado que $2x^2 = 1/2$, $2y^2 = 1/2$, donde $x > 0$, $y > 0$, el punto P que maximiza el volumen de la caja es $P = (1/2, 1/2, 1/2)$ y el volumen máximo es $1/8$.

Ejercicio 4. Consideremos la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0,$$

orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, yz^2, x^2 z)$. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

Solución. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ -y & yz^2 & x^2 z \end{vmatrix} = (-2yz, -2xz, 1).$$

Dado que $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, parametrizamos la superficie S mediante

$$S(x, y) = \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right), \quad (x, y) \in D,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. El producto vectorial fundamental es

$$S_x \times S_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1\right),$$

y tiene la orientación exterior a la esfera porque $S_x \times S_y (0, 0) = (0, 0, 1)$.
Calculamos directamente

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS &= \iint_D \operatorname{rot} F(S(x, y)) \cdot S_x \times S_y \, dx \, dy = \iint_D (1 - 4xy) \, dx \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(1 - 4r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta\right) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - r^4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (2 - 8 \operatorname{sen} 2\theta) \, d\theta = [2\theta + 4 \cos 2\theta]_0^{2\pi} = 4\pi,
\end{aligned}$$

usando el cambio de variables a coordenadas polares.

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \oint\limits_C F \cdot dr,$$

donde la curva C, frontera de S, viene dada por $x^2+y^2=4, \;\; z=0$. Una parametrización de C con la orientación inducida por la normal exterior a la esfera es $r\,(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 0)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculamos

$$\begin{aligned}\oint\limits_C F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F\,(r\,(t)) \cdot r'\,(t)\;dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\,\mathrm{sen}\, t, 0, 0) \cdot (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 0)\;dt = 4\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\, t\, dt \\ &= 4\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2\left[\theta - \frac{\mathrm{sen}\, 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.\end{aligned}$$

Para usar el teorema de Gauss, consideramos la superficie S^* definida por $x^2+y^2 \leq 4, \;\; z=0$. Entonces, la superficie $S \cup S^*$ es la frontera de la semiesfera V, donde la orientación de S^* viene dada por la normal exterior a la semiesfera. El teorema de la divergencia de Gauss implica que

$$\iint\limits_{S\cup S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\,(\operatorname{rot} F)\;dx\,dy\,dz = 0,$$

porque $\operatorname{div}\,(\operatorname{rot} F)\,(x,y,z) = 0$. En consecuencia,

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = -\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS.$$

Parametrizamos la superficie $S^*\,(x,y) = (x,y,0)$, donde $x^2+y^2 \leq 4$. El producto vectorial fundamental es

$$S^*_x \times S^*_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)\,.$$

Dado que está orientado hacia el interior de V, debemos integrar

$$-\operatorname{rot} F\,(S^*\,(x,y)) \cdot S^*_x \times S^*_y = -\,(0,0,1)\cdot(0,0,1) = -1.$$

El flujo exterior, a través de S^*, del rotacional del campo F es

$$\iint\limits_{S^*} \operatorname{rot} F \cdot N\, dS = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy = -4\pi,$$

lo que implica el resultado pedido.