

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 3 de Julio de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Se considera la función definida por la determinación principal del arco tangente, es decir $f(x) = \arctan(x)$, tal que $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$.

1. Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x_0 = 1$, $P_2(x)$, y el correspondiente resto $R_2(x)$.
2. Aproximar el valor de $\arctan(1.1)$ mediante $P_2(1.1)$, obteniendo una cota del error cometido.
3. Obtener la serie de MacLaurin (serie de Taylor en $x_0 = 0$) de f y encontrar su radio de convergencia. Explicar si puede utilizarse dicha serie para calcular un valor aproximado de $\arctan(1.1)$.
4. Obtener una aproximación de $\arctan(1.1)$ resolviendo la ecuación $\tan(t) = 1.1$ por el método de Newton, realizando las iteraciones necesarias para que se repitan las tres primeras cifras decimales.

Solución.

1. El teorema de Taylor asegura que si f es diferenciable con continuidad n veces en $[a, b]$ y existe $f^{(n+1)}$ en (a, b) , dados $x, x_0 \in (a, b)$, existe c entre x_0 y x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (x - x_0)^{n+1}.$$

Las derivadas sucesivas de $f(x) = \arctan(x)$ son

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$
$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(1+x^2)4x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$

Los valores de las derivadas sucesivas de f en $x_0 = 1$ son $f(1) = \pi/4$, $f'(1) = 1/2$, $f''(1) = -1/2$. Aplicando el teorema de Taylor para $n = 2$, $x_0 = 1$, tenemos que

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2, \quad R_2(x) = \frac{1}{6} \frac{(6c^2 - 2)}{(1+c^2)^3} (x-1)^3,$$

donde c está entre 1 y x .

2. El valor aproximado de $\arctan(1.1)$ es $P_2(1.1) \approx 0.8329$. El error que se comete al aproximar con $P_2(1.1)$ es el valor absoluto del resto $R_2(1.1)$. Sabemos que $1 \leq c \leq 1.1$, luego acotamos dicho error mediante

$$|R_2(1.1)| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{6(1.1)^2 - 2}{2^3} \right) (0.1)^3 = \frac{5.26}{48} \times 10^{-3} < 2 \times 10^{-4}.$$

3. La serie de MacLaurin de $f'(x)$ es

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots,$$

donde $|x| < 1$. Integrando término a término, obtenemos

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots$$

El radio de convergencia es $R = 1$ y la serie está definida en $[-1, 1]$ porque en los puntos terminales del intervalo obtenemos series alternadas convergentes.

4. Aplicamos el *método de Newton* a la ecuación $\tan(t) = 1.1$, equivalente a $g(t) = 0$, para $g(t) = \tan(t) - 1.1$. A partir del punto $t_0 = \pi/4$, la iteración

$$t_{n+1} := t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} = t_n - \frac{\tan(t_n) - 1.1}{\sec^2(t_n)},$$

donde $n \geq 1$, nos proporciona las siguientes soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.8353981635, \\ t_2 &= 0.8329877015, \\ t_3 &= 0.8329812667, \\ t_4 &= 0.8329812667. \end{aligned}$$

Entonces, la aproximación de $\arctan(1.1)$, obtenida con el método de Newton, es 0.8329812667.

Ejercicio 2. Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje y . Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r , centrado en el eje de revolución.

1. Obtener el volumen del sólido resultante.
2. Obtener el área lateral total A de dicho sólido (se consideran las superficies laterales interior y exterior, pero no la base). Determinar los valores de r en los que A alcanza sus valores extremos.

Solución.

1. Usando el *método de las capas*, el volumen pedido es

$$\text{vol} = 2\pi \int_r^3 x\sqrt{9-x^2} dx = 2\pi \left[-\frac{1}{3} (9-x^2)^{3/2} \right]_r^3 = \frac{2\pi}{3} (9-r^2)^{3/2}.$$

Usando el *método de los discos* para las funciones $g_1(y) = r$ y $g_2(y) = \sqrt{9-y^2}$, y teniendo en cuenta que la altura del orificio de radio r es $\sqrt{9-r^2}$, el volumen pedido es

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} (9-y^2-r^2) dy = \pi \left[(9-r^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{9-r^2}} \\ &= \pi \left[(9-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (9-r^2)^{3/2} \right] = \frac{2\pi}{3} (9-r^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

2. El área lateral interior A_1 de la superficie generada por $g_1(y) = r$ es

$$A_1 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r dy = 2\pi r \sqrt{9-r^2}.$$

El área lateral exterior A_2 de la superficie generada por $g_2(y) = \sqrt{9-y^2}$ es

$$A_2 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} g_2 \sqrt{1+(g_2')^2} dy.$$

Calculamos

$$1+(g_2')^2 = 1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}} \right)^2 = 1 + \frac{y^2}{9-y^2} = \frac{9}{9-y^2},$$

por lo que $g_2 \sqrt{1+(g_2')^2} = 3$, y el área lateral exterior es

$$A_2 = 2\pi \int_0^{\sqrt{9-r^2}} 3 dy = 6\pi \sqrt{9-r^2}.$$

Entonces, el área lateral total es

$$A(r) = A_1 + A_2 = 2\pi\sqrt{9-r^2}(r+3), \quad 0 \leq r \leq 3.$$

La condición necesaria para los extremos locales es

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2\pi \left(\frac{-r}{\sqrt{9-r^2}}(r+3) + \sqrt{9-r^2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{-r(r+3) + 9-r^2}{\sqrt{9-r^2}} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{-2r^2 - 3r + 9}{\sqrt{9-r^2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación $2r^2 + 3r - 9 = 0$, obteniendo

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{-3 \pm 9}{4} = \begin{cases} 3/2, \\ -3. \end{cases}$$

Por tanto, el único extremo local en el interior del intervalo $[0, 3]$ es $r = 3/2$ y el valor del área lateral total en dicho extremo es

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = 2\pi\sqrt{9-\frac{9}{4}}\left(\frac{3}{2}+3\right) = 2\pi\sqrt{\frac{27}{4}}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi.$$

En los puntos terminales del intervalo, el área lateral total es $A(0) = 18\pi$ y $A(3) = 0$. Dado que

$$18\pi < \frac{27\sqrt{3}}{2}\pi \iff 4 < 3\sqrt{3} \iff 16 < 27,$$

concluimos que en $r = 0$ el área lateral total tiene un mínimo absoluto y en $r = 3/2$ tiene un máximo absoluto.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 3 de Julio de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = ((x - 1)^3, (y + 1)^3, (z - 1)^3),$$

a través de la superficie cerrada

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 0\}.$$

Solución. Completando cuadrados en la ecuación de S , obtenemos:

$$0 = x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = (x - 1)^2 - 1 + (y + 1)^2 - 1 + (z - 1)^2 - 1.$$

Por tanto, la ecuación de la superficie es $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F* , es decir

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz,$$

donde V es la esfera con centro en el punto $(1, -1, 1)$ y radio $\sqrt{3}$. Para calcular la integral triple, usaremos coordenadas esféricas (r, θ, Φ) con centro en $(1, -1, 1)$. Las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$x = 1 + r \operatorname{sen} \theta \cos \Phi, \quad y = -1 + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi, \quad z = 1 + r \cos \theta,$$

donde $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, y el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \Phi)} = r^2 \operatorname{sen} \theta.$$

Dado que $\operatorname{div}(F) = 3(x - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 3(z - 1)^2 = 3r^2$, el flujo de salida de F a través de S es

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{3}} 3r^2 r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\Phi \\ &= 3(2\pi) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{3}} r^4 \, dr \right) \\ &= 6\pi [-\cos \theta]_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 12\pi \frac{(\sqrt{3})^5}{5} = \frac{108\sqrt{3}}{5}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Calcular directamente y usando el teorema de Green la integral de línea

$$\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy,$$

donde C es el contorno del triángulo con vértices en los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(1, 3)$ recorrido en sentido positivo.

Solución. En primer lugar, calculamos directamente la integral de línea

$$\oint_C P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy + \int_{C_3} P dx + Q dy,$$

donde C_1 es el segmento que une los puntos $(1, 1)$ y $(2, 2)$, C_2 es el segmento que une los puntos $(2, 2)$ y $(1, 3)$, y C_3 es el segmento que une los puntos $(1, 3)$ y $(1, 1)$. La recta que contiene a C_1 es $y = x$, la que contiene a C_2 es $y - 2 = -(x - 2)$, es decir $y = 4 - x$, siendo $x = 1$ la recta que contiene a C_3 . Parametrizamos C_1 con $(x, y) = (t, t)$, $1 \leq t \leq 2$, el segmento C_2 con $(x, y) = (4 - t, t)$, $2 \leq t \leq 3$, y C_3 con $(x, y) = (1, 3 - t)$, $0 \leq t \leq 2$. A continuación, calculamos las tres integrales de línea

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_1^2 [2(t^2 + t^2) + (2t)^2] dt = \int_1^2 8t^2 dt = 8 \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{56}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} P dx + Q dy &= \int_2^3 [2((4-t)^2 + t^2)(-1) + 4^2] dt \\ &= \int_2^3 [(-2)(16 - 8t + 2t^2) + 16] dt \\ &= \int_2^3 (-4t^2 + 16t - 16) dt = (-4) \int_2^3 (t^2 - 4t + 4) dt \\ &= (-4) \int_2^3 (t - 2)^2 dt = (-4) \left[\frac{(t - 2)^3}{3} \right]_2^3 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\int_{C_3} P dx + Q dy = \int_0^2 (4 - t)^2 (-1) dt = \left[\frac{(4 - t)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{64}{3} = -\frac{56}{3}.$$

Por tanto, tenemos que

$$\oint_C P dx + Q dy = -\frac{4}{3}.$$

El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

Dado que $Q_x - P_y = 2(x + y) - 4y = 2x - 2y$, tenemos que calcular

$$I = \iint_D (2x - 2y) dx dy,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 4 - x\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_x^{4-x} (2x - 2y) dy dx = \int_1^2 [2xy - y^2]_x^{4-x} dx \\ &= \int_1^2 [2x(4-x) - (4-x)^2 - 2x^2 + x^2] dx \\ &= \int_1^2 (-4x^2 + 16x - 16) dx = (-4) \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= (-4) \int_1^2 (x-2)^2 dx = (-4) \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^2 \\ &= (-4) \left[-\frac{(-1)^3}{3} \right] = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$