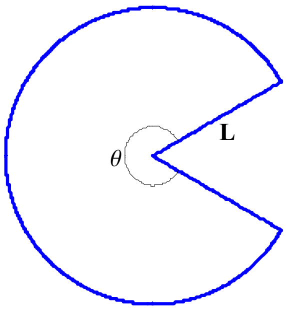
CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Al pegar los bordes rectos de un sector circular de radio L y ángulo central θ (veáse figura) se forma la superficie lateral de un cono. Encontrar el valor de θ para el cual el volumen de dicho cono resulta máximo.



Solución. El volumen del cono, cuya base es un círculo de radio r y cuya altura es h, viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. La construcción del cono implica que $h = \sqrt{L^2 - r^2}$. Además, la longitud del borde circular del sector es θL, y coincide con la longitud de la circunferencia base, cuyo radio es r, del cono. Es decir, $2\pi r = \theta L$, lo que implica

$$r = \frac{\theta L}{2\pi} \Longrightarrow h^2 = L^2 - \frac{\theta^2 L^2}{4\pi^2} = L^2\left(1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right).$$

El volumen del cono, en función del ángulo θ, es

$$V(\theta) = \frac{\pi\theta^2 L^3}{12\pi^2}\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{L^3}{12\pi}\sqrt{\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}}.$$

Calculamos la derivada en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$,

$$V'(\theta) = \frac{L^3}{12\pi}\frac{\left(4\theta^3 - \frac{6\theta^5}{4\pi^2}\right)}{2\sqrt{\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}}}.$$

Si $V'(\theta) = 0$, entonces

$$4\theta^3 - \frac{3\theta^5}{2\pi^2} = 0 \Longleftrightarrow 4\theta^3 = \frac{3\theta^5}{2\pi^2} \Longleftrightarrow \frac{8\pi^2}{3} = \theta^2,$$

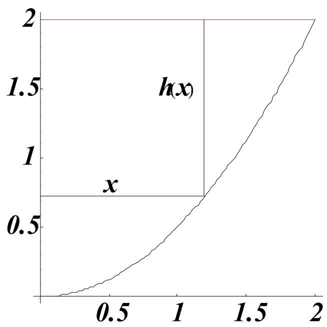
luego el *único* punto crítico en el intervalo $(0, 2\pi)$ es

$$\theta^* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi = \frac{2\pi}{3}\sqrt{6}.$$

Observemos que $V(0) = V(2\pi) = 0$, siendo $V(\theta) > 0$ en el intervalo $(0, 2\pi)$. Por ello, $V(\theta^*)$ es el único máximo absoluto de $V(\theta)$ en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$.

Ejercicio 2. Sea un sólido generado haciendo girar la región acotada por la curva $y = x^2/2$, y la recta $y = 2$, alrededor del eje OY. Se desea perforar un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que dicho sólido pierda un cuarto de su volumen. Calcular el diámetro que debe tener dicho orificio.

Solución. La región es $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad x^2/2 \leq y \leq 2\}$.



Usando el método de las capas, el volumen del solido sin perforar es

$$V = 2\pi \int_0^2 x\, h(x)\, dx,$$

donde $h(x) = 2 - x^2/2$. Entonces, el volumen es

$$V = 2\pi \int_0^2 x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \pi \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi.$$

Sabemos que al ser perforado, el sólido pierde un cuarto de su volumen, es decir π. En consecuencia, el volumen V' del sólido perforado es 3π. La región que genera este sólido es $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r \leq x \leq 2, \quad x^2/2 \leq y \leq 2\}$. Por tanto el volumen V', usando el método de las capas, es

$$V'(r) = \pi \int_r^2 \left(4x - x^3\right) dx = \pi \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_r^2 = \pi \left(4 - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\right),$$

donde $0 \leq r \leq 2$. Para calcular el radio r del orificio, debemos resolver la ecuación

$$\pi \left(4 - 2r^2 + \frac{r^4}{4}\right) = 3\pi \Longleftrightarrow r^4 - 8r^2 + 4 = 0.$$

Si elegimos $s = r^2$, obtenemos $s^2 - 8s + 4 = 0$, con $0 \leq s \leq 4$. Sus raíces son

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}.$$

Dado que $4 + 2\sqrt{3} > 4$, tenemos que $s = 4 - 2\sqrt{3}$, por lo que el radio del orificio es $r = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ y su diámetro es $d = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Ejercicio 3. Sean **A** y **B** los puntos donde se cortan las curvas $y^2 = 2x^3$, $x^2+y^2 = 20$. Calcular la longitud de la curva cerrada **OABO** formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo **O** el origen de coordenadas.

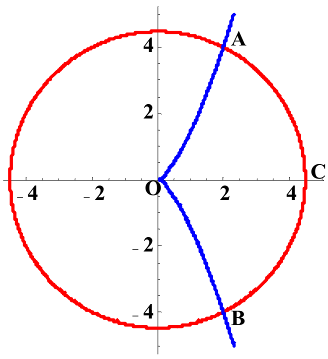
Solución. Las ecuaciones de las curvas son $x^2 + y^2 = 20$, $y^2 = 2x^3$, por lo que los puntos que pertenecen a las dos curvas verifican la ecuación $x^2 + 2x^3 = 20$, que es equivalente a $2x^3 + x^2 - 20 = 0$. Buscamos soluciones enteras y comprobamos que

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & 1 & 0 & -20 \\ 2 & & 4 & 10 & 20 \\ \hline & 2 & 5 & 10 & 0 \end{array}$$

Entonces, $x = 2$ es una solución de la ecuación y además

$$2x^3 + x^2 - 20 = (x-2)\left(2x^2 + 5x + 10\right) = 0.$$

El discriminante de la ecuación de segundo grado es $b^2 - 4ac = 25 - 80 < 0$, luego no tiene soluciones reales y la única solución real de la ecuación de tercer grado es $x = 2$. Esta solución implica que $y^2 = 16$, por lo que $y = \pm 4$, siendo $\mathbf{A} = (2,4)$ y $\mathbf{B} = (2,-4)$ los puntos donde se cortan las curvas. Para utilizar la simetría de las curvas, vamos a considerar el punto $\mathbf{C} = \left(\sqrt{20}, 0\right)$, que es la intersección de la circunferencia con el eje x.



La longitud de la curva cerrada es

$$l\,(\mathbf{OABO}) = 2l\,(\mathbf{OAC}) = 2\,(l\,(\mathbf{OA}) + l\,(\mathbf{AC}))\,.$$

Las longitudes de las curvas vienen dadas por

$$l\,(\mathbf{OA}) = \int_0^2 \sqrt{1 + (y_1')^2}\,dx,$$
$$l\,(\mathbf{AC}) = \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{1 + (y_2')^2}\,dx,$$

donde $y_1^2 = 2x^3$, $x^2 + y_2^2 = 20$. Derivando de forma implícita, obtenemos

$$2y_1y_1' = 6x^2 \Longrightarrow (y_1')^2 = \left(\frac{3x^2}{y_1}\right)^2 = \frac{9x^4}{2x^3} = \frac{9}{2}x,$$
$$2x + 2y_2y_2' = 0 \quad \Longrightarrow (y_2')^2 = \left(\frac{-x}{y_2}\right)^2 = \frac{x^2}{20 - x^2}.$$

A continuación, calculamos las integrales

$$\begin{aligned} l\,(\mathbf{OA}) &= \int_0^2 \sqrt{1+\frac{9}{2}x}\,dx = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(1+\frac{9}{2}x\right)^{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\,(\mathbf{AC}) &= \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{1+\frac{x^2}{20-x^2}}\,dx = \int_2^{\sqrt{20}} \sqrt{\frac{20}{20-x^2}}\,dx \\ &= \int_2^{\sqrt{20}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)^2}}\,dx = \sqrt{20}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)\right]_2^{\sqrt{20}} \\ &= 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

En conclusión, la longitud de la curva cerrada es

$$l\,(\mathbf{OABO}) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)+4\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 27 de Enero de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 4.

Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a\left(1+x^3\right)}\,dx,$$

según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Solución. Consideramos las integrales impropias

$$I_1 = \int_0^1 \frac{7x+3}{x^a\left(1+x^3\right)}\,dx, \quad I_2 = \int_1^\infty \frac{7x+3}{x^a\left(1+x^3\right)}\,dx.$$

Para analizar la convergencia de I_1, calculamos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{7x+3}{x^a\left(1+x^3\right)}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^p\left(7x+3\right)}{x^a\left(1+x^3\right)} = 3,$$

si $p = a$. Entonces, el carácter de I_1 es el mismo que la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx.$$

Dado que esta última integral converge si y sólo si $-a > -1 \Leftrightarrow a < 1$, tenemos que I_1 converge si y sólo si $a < 1$.

Para analizar la convergencia de I_2, calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{7x+3}{x^a\left(1+x^3\right)}}{\dfrac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p\left(7x+3\right)}{x^a\left(1+x^3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^{p+1}+3x^p}{x^{a+3}+x^a} = 7,$$

si $p+1 = a+3$, es decir $p = a+2$. En consecuencia, el carácter de I_2 es el mismo que la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{a+2}}\,dx,$$

que converge si y sólo si $a+2 > 1 \Leftrightarrow a > -1$.

Entonces, la integral converge si y sólo si $-1 < a < 1$.

Ejercicio 5. Determinar los valores reales de x que hacen que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$ sea convergente y hallar su suma en dichos puntos. Aplicar el método de Newton, con $x_0 = 0$, para aproximar la solución de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = 2$.

Solución. El radio de convergencia de la serie de potencias es

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4} = 1.$$

En los extremos $x = \pm 1$, no se cumple la condición necesaria de convergencia de series porque $\lim_{n\to\infty}|a_n x^n| = \lim_{n\to\infty}(n+1)^2 = \infty$. Entonces, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

Para calcular la suma de la serie en los puntos $|x| < 1$, sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

para $|x| < 1$. Entonces, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Derivando de nuevo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

para $|x| < 1$. En consecuencia, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Aplicamos el *método de Newton* a la ecuación $2(1-x)^3 = 1 + x$, equivalente a $f(x) = 0$, para $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 1$. A partir del punto $x_0 = 0$, la iteración

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde $n \geq 1$, nos proporciona las siguientes soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1428571429,\\ x_2 &= 0.1644204852,\\ x_3 &= 0.1648774497,\\ x_4 &= 0.1648776515,\\ x_5 &= 0.1648776515. \end{aligned}$$