CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Obtener la expresión en que se transforma $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}$, al cambiar las variables independientes (x, y) por (u, v) y la función z por w, considerando que unas y otras están relacionadas por

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2-v^2}{4} - w.$$

Solución. En primer lugar, obtenemos $u = x + y, \quad v = x - y$. A continuación, calculamos

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x = z_u + z_v, \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y = z_u - z_v. \end{aligned}$$

Usando estos resultados, obtenemos

$$\begin{aligned} (z_x)_x &= (z_x)_u \, u_x + (z_x)_v \, v_x = z_{uu} + z_{vu} + z_{uv} + z_{vv}, \\ (z_x)_y &= (z_x)_u \, u_y + (z_x)_v \, v_y = z_{uu} + z_{vu} - (z_{uv} + z_{vv}), \\ (z_y)_y &= (z_y)_u \, u_y + (z_y)_v \, v_y = z_{uu} - z_{vu} - (z_{uv} - z_{vv}). \end{aligned}$$

Suponiendo que las derivadas cruzadas coincidan, tenemos que

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 4z_{uu}.$$

Finalmente,

$$z_u = \frac{2u}{4} - w_u \ \text{ y además } \ z_{uu} = \frac{1}{2} - w_{uu}.$$

Entonces, la expresión transformada es $2 - 4w_{uu}$.

Ejercicio 2. De entre todos los planos que contienen al punto (a, b, c) situado en el octante positivo, determinar el que hace mínimo el volumen del tetraedro que forma con los planos coordenados.

Solución. Consideremos el tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ y $(0, 0, \gamma)$. Calculamos su volumen integrando el área de las secciones, que son triángulos de vértices $(x, 0, z)$, $(0, y, z)$, $(0, 0, z)$, donde $0 \leq z \leq \gamma$. Es decir,

$$V = \int_0^\gamma A(z)\, dz, \quad \text{donde } A(z) = \frac{1}{2}xy.$$

Sabemos que el vértice $(x, 0, z)$ es un punto de la recta contenida en el plano $y = 0$, que pasa por $(\alpha, 0, 0)$ y $(0, 0, \gamma)$. La ecuación de esta recta es $x - \alpha = \left(\frac{-\alpha}{\gamma}\right) z$, es decir $x = \alpha - \frac{\alpha}{\gamma} z$. El vértice $(0, y, z)$ pertenece a la recta contenida en el plano $x = 0$, que pasa por $(0, \beta, 0)$ y $(0, 0, \gamma)$. Su ecuación es $y - \beta = \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right) z$, es decir $y = \beta - \frac{\beta}{\gamma} z$. Entonces,

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\alpha}{\gamma} z\right)\left(\beta - \frac{\beta}{\gamma} z\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\beta - 2\frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} z^2\right) \\ &= \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} z^2. \end{aligned}$$

El volumen del tetraedro es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\gamma \left(\frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2} z^2\right) dz = \left[\frac{\alpha\beta}{2} z - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z^2}{2} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma^2}\frac{z^3}{3}\right]_0^\gamma \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta\gamma}{2} + \frac{\alpha\beta\gamma}{6} = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación del plano no coordenado que contiene a los vértices $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ y $(0, 0, \gamma)$, tenemos que

$$A\alpha + D = 0, \quad B\beta + D = 0, \quad C\gamma + D = 0.$$

Estas ecuaciones implican que $A = -\frac{D}{\alpha}$, $B = -\frac{D}{\beta}$, $C = -\frac{D}{\gamma}$, por lo que la ecuación del plano es

$$-\frac{D}{\alpha} x - \frac{D}{\beta} y - \frac{D}{\gamma} z + D = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

En consecuencia, debemos resolver min $\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, entre los planos con vértices en los puntos $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$, $(0, 0, \gamma)$ y que contienen al punto (a, b, c). Es decir, obtener el mínimo de $f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$ sujeto a la restricción

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} - 1 = 0.$$

Usando multiplicadores de Lagrange, tenemos que $\nabla f = \lambda \nabla g$ implica

$$\frac{1}{6}\beta\gamma = -\lambda\frac{a}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{6}\alpha\gamma = -\lambda\frac{b}{\beta^2}, \quad \frac{1}{6}\alpha\beta = -\lambda\frac{c}{\gamma^2}.$$

A partir de ellas, obtenemos

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma = -\lambda\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma = -\lambda\frac{b}{\beta}, \quad \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma = -\lambda\frac{c}{\gamma}. \tag{1}$$

Sumando las tres ecuaciones y usando que $g(\alpha, \beta, \gamma) = 0$,

$$\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma = -\lambda\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = -\lambda.$$

Si sustituimos el valor de λ en las ecuaciones (1) tenemos que

$$\alpha = 3a, \quad \beta = 3b, \quad \gamma = 3c.$$

El plano que hace mínimo el volumen es el que contiene a los puntos $(3a, 0, 0)$, $(0, 3b, 0)$ y $(0, 0, 3c)$, cuya ecuación es

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3.$$

El volumen mínimo es $V = \dfrac{1}{6}(3a)(3b)(3c) = \dfrac{9}{2}abc.$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Segundo Examen Parcial. 13 de Junio de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Calcular el área de S.

Solución.

(A) Usando *coordenadas cilíndricas* $x = r\cos t,\ \ y = r \operatorname{sen} t$, tenemos que

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{r^2\cos^2 t - r^2 \operatorname{sen}^2 t} = r\sqrt{\cos 2t},$$

donde $\cos 2t \geq 0$, $\cos t \geq 0$ y $\operatorname{sen} t \geq 0$ implican que $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}$. Además, el trozo de cono es interior al cilindro, por lo que $r^2\cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t \leq a^2$, es decir, $r \leq a$. Entonces, la parametrización de S es

$$S(r,t) = \left(r\cos t, r\operatorname{sen} t, r\sqrt{\cos 2t}\right),\quad 0 \leq r \leq a,\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Obtenemos un vector paralelo al vector normal a la superficie mediante

$$\begin{aligned}
S_r \times S_t &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \operatorname{sen} t & \sqrt{\cos 2t} \\ -r\operatorname{sen} t & r\cos t & -\dfrac{r\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{vmatrix} \\
&= \left(-\frac{r\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}} - r\cos t\sqrt{\cos 2t}, \frac{r\cos t\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}} - r\operatorname{sen} t\sqrt{\cos 2t}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t - r\cos t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\cos t\operatorname{sen} 2t - r\operatorname{sen} t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\cos t\left[2\operatorname{sen}^2 t + \cos 2t\right]}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\operatorname{sen} t\left[2\cos^2 t - \cos 2t\right]}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right) \\
&= \left(\frac{-r\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r\operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right).
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos

$$\|S_r \times S_t\|^2 = \frac{r^2}{\cos 2t} + r^2 = r^2\left(\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}\right).$$

Entonces, el área de S es

$$\begin{aligned}
\acute{a}rea\,(S) &= \int_0^{\pi/4}\int_0^a \|S_r \times S_t\|\,dr\,dt = \int_0^{\pi/4}\int_0^a r\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dr\,dt \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a \int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\,dt.
\end{aligned}$$

Dado que $1+\cos 2t = 2\cos^2 t$ y $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t$, la integral

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{\cos 2t}}\, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 t}}\, dt = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\operatorname{arcsen} u]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

donde $u = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$. En consecuencia, $\acute{a}rea\,(S) = \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

(B) Usando *coordenadas cartesianas* (y, z), tenemos que $x = \sqrt{y^2+z^2}$. La superficie S es interior al cilindro, por lo que $x^2 + y^2 = 2y^2 + z^2 \leq a^2$. Entonces, la parametrización de S es

$$S\,(y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right), \quad (y,z) \in D,$$

donde $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 + z^2 \leq a^2, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0\}$. A partir de la ecuación $x^2 = y^2 + z^2$, obtenemos $2xx_y = 2y, \;\; 2xx_z = 2z$, lo que implica

$$x_y = \frac{y}{x}, \;\; x_z = \frac{z}{x}.$$

El area de la superficie es

$$\begin{aligned} \acute{a}rea\,(S) &= \iint_D \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, dy\, dz = \iint_D \sqrt{1 + \frac{y^2+z^2}{x^2}}\, dy\, dz \\ &= \iint_D \sqrt{2}\, dy\, dz, \end{aligned}$$

porque $y^2 + z^2 = x^2$. Observemos que

$$2y^2 + z^2 \leq a^2 \iff \frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{x^2}{a^2} \leq 1.$$

Entonces, $\iint_D dy\, dz$ es el área de la cuarta parte $(y \geq 0, \; z \geq 0)$ de la región encerrada por una elipse de semiejes $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y a. Dicha área es $\dfrac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}$, por lo que

$$\acute{a}rea\,(S) = \sqrt{2}\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ejercicio 4. Sea F el campo vectorial $F(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$ y sea S la superficie del ejercicio anterior. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS$, con la normal exterior al cono, directamente y usando el teorema de Stokes.

Solución. En primer lugar, calculamos el rotacional del campo F,

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z, y).$$

(A) Usando *coordenadas cilíndricas*, la parametrización de S es

$$S(r,t) = \left(r\cos t, r \operatorname{sen} t, r\sqrt{\cos 2t}\right), \quad 0 \le r \le a, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4},$$

$$S_r \times S_t = \left(\frac{-r\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}, \frac{r \operatorname{sen} t}{\sqrt{\cos 2t}}, r\right).$$

Dado que en el punto $S(a,0) = (a,0,a)$, el vector $S_r \times S_t(a,0) = (-a,0,a)$ apunta hacia el exterior del cono, tenemos que la normal exterior a S tiene el mismo sentido que $S_r \times S_t$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS &= (\operatorname{rot} F)(S(r,t)) \cdot (S_r \times S_t)\, dr\, dt \\ &= \left(0, -r\sqrt{\cos 2t}, r \operatorname{sen} t\right) \cdot (S_r \times S_t)\, dr\, dt \\ &= \left(-r^2 \operatorname{sen} t + r^2 \operatorname{sen} t\right) dr\, dt = 0. \end{aligned}$$

La integral pedida es

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

El teorema de Stokes asegura que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C F \cdot dr,$$

donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es la curva frontera de S. La parametrización de C_1 es

$$r_1(t) = S(a,t) = \left(a\cos t, a \operatorname{sen} t, a\sqrt{\cos 2t}\right), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$$

Como $r_1(0) = (a,0,a)$ y $r_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, la orientación inducida por la normal exterior al cono coincide con la orientación de C_1. Dado que

$$F[r_1(t)] = \left(a^2\cos^2 t, a^2 \operatorname{sen} t \cos t, a^2 \cos t\sqrt{\cos 2t}\right),$$

$$r_1'(t) = \left(-a \operatorname{sen} t, a\cos t, -\frac{a \operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\right),$$

su producto escalar es

$$\begin{aligned}F\left[r_1(t)\right]\cdot r_1'(t) &= -a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t + a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t - a^3\operatorname{sen} 2t\cos t\\ &= -2a^3\operatorname{sen} t\cos^2 t.\end{aligned}$$

Calculamos la integral de línea

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} F\left[r_1(t)\right]\cdot r_1'(t)\ dt &= 2a^3\int_0^{\pi/4}\cos^2 t\left(-\operatorname{sen} t\right)\ dt = 2a^3\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right) = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

La curva C_2 es la intersección de S con el plano $z=0$, es decir el segmento de la recta $y=x$ que une los puntos $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0\right)$ y $(0,0,0)$. Una parametrización de C_2 es

$$r_2(t)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t,\frac{a}{\sqrt{2}}-t,0\right),\quad 0\le t\le\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

La integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} F\left[r_2(t)\right]\cdot r_2'(t)\ dt &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} -2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t\right)^2 dt = 2\left[\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-t\right)^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\\ &= -\frac{2}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}a^3}{6}.\end{aligned}$$

La curva C_3 es la intersección de S con el plano $y=0$, es decir el segmento de la recta $z=x$ que une los puntos $(0,0,0)$ y $(a,0,a)$. Una parametrización de C_3 es $r_3(t)=(t,0,t)$, $0\le t\le a$, y la integral de línea es

$$\int_0^a F\left[r_3(t)\right]\cdot r_3'(t)\ dt = \int_0^a 2t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{2a^3}{3}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\oint_C F\cdot dr &= \int_{C_1} F\cdot dr + \int_{C_2} F\cdot dr + \int_{C_3} F\cdot dr\\ &= a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}a^3}{6} + \frac{2a^3}{3} = 0.\end{aligned}$$

(B) Usando *coordenadas cartesianas* (y, z), la parametrización de S es

$$S(y,z) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, y, z\right), \quad (y,z) \in D,$$

donde $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 + z^2 \leq a^2, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0\}$. Calculamos el producto vectorial

$$S_y \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} & 1 & 0 \\ \dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1, \frac{-y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right).$$

En el punto $S(0,a) = (a,0,a)$, el vector $S_y \times S_z(0,a) = (1,0,-1)$ apunta hacia el interior del cono. Entonces,

$$\operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = (0,-z,y) \cdot \left(-1, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) dy\, dz = 0,$$

por lo que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

Para usar el teorema de Stokes, debemos calcular

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr,$$

donde las curvas C_1, C_2 y C_3 se han analizado previamente. Dado que las integrales de línea sobre las curvas C_2 y C_3 se pueden calcular de manera análoga al caso **(A)**, vamos a parametrizar la curva C_1. Sabemos que los puntos de C_1 verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2y^2 + z^2 &= a^2, \\ y^2 + z^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Entonces $z^2 = a^2 - 2y^2, \ \ x^2 = a^2 - y^2$, por lo que

$$r_1(y) = \left(\sqrt{a^2-y^2}, y, \sqrt{a^2-2y^2}\right), \quad 0 \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}},$$

es una parametrización de la curva C_1. Como $r_1(0) = (a,0,a)$ tenemos que su orientación es la inducida por la normal exterior al cono. A continuación, calculamos

$$\begin{aligned} F[r_1(y)] &= \left(a^2 - y^2, y\sqrt{a^2-y^2}, \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-2y^2}\right), \\ r_1'(y) &= \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}, 1, \frac{-2y}{\sqrt{a^2-2y^2}}\right). \end{aligned}$$

Su producto escalar es

$$\begin{aligned} F\left[r_1\left(y\right)\right]\cdot r_1'\left(y\right) &= -y\sqrt{a^2-y^2}+y\sqrt{a^2-y^2}-2y\sqrt{a^2-y^2} \\ &= -2y\left(a^2-y^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_1} F\cdot dr &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} -2y\left(a^2-y^2\right)^{1/2}dy = \frac{2}{3}\left[\left(a^2-y^2\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{a^2}{2}\right)^{3/2}-a^3\right] = \frac{2a^3}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-1\right) = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶ ◀ ○ ▶