

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen 3 de Septiembre de 2001

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Dadas las rectas $y = x$, $y = ax$, $y = 1 - ax$, con $a \geq 1$, se pide:

(a) Determinar, en función de a , el área de la región limitada por las tres rectas.

(b) Calcular los valores de $a \in [1, \infty)$ que hacen el área máxima o mínima.

Sea $F : \left[0, \frac{1}{a+1}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ la función que asigna a cada número $z \in \left[0, \frac{1}{a+1}\right]$ el área $F(z)$ del trozo de la región del apartado (a) comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$.

(c) Justificar la existencia de $F'(z)$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{a+1}\right]$. Calcular $F'(z)$.

(d) ¿Es derivable la función $F'(z)$ en todos los puntos de su dominio?

Solución.

(a) La región determinada por las tres rectas es el triángulo cuyos vértices son el origen y los puntos donde se cortan las rectas $y = ax$, $y = x$ con $y = 1 - ax$.



Para obtener un punto, resolvemos $ax = 1 - ax$, obteniendo $2ax = 1$, por lo que sus coordenadas son

$$x = \frac{1}{2a}, \quad y = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

El otro punto se obtiene a partir de $x = 1 - ax$, siendo sus coordenadas

$$x = \frac{1}{a+1} = y.$$

El área del triángulo, con $a \geq 1$, es

$$\begin{aligned}
 A(a) &= \int_0^{1/2a} (ax - x) dx + \int_{1/2a}^{1/(a+1)} (-ax + 1 - x) dx \\
 &= (a-1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2a} + \left[x - (a+1) \frac{x^2}{2} \right]_{1/2a}^{1/(a+1)} \\
 &= \frac{a-1}{8a^2} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a} + \frac{a+1}{8a^2} \\
 &= \frac{1}{4a} + \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{4a} \\
 &= \frac{4a - 2(a+1)}{8a(a+1)} = \frac{2a-2}{8a(a+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{a-1}{a(a+1)} \right).
 \end{aligned}$$

(b) Para calcular los puntos críticos, resolvemos

$$A'(a) = \frac{1}{4} \left(\frac{a(a+1) - (a-1)(2a+1)}{a^2(a+1)^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{-a^2 + 2a + 1}{a^2(a+1)^2} \right) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a $a^2 - 2a - 1 = 0$, cuyas raíces son

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

La raíz $1 - \sqrt{2}$ no pertenece al intervalo $(1, \infty)$, por lo que el único punto crítico en dicho intervalo es $a = 1 + \sqrt{2}$. Dado que $A'(a) > 0$ si $1 < a < 1 + \sqrt{2}$ y $A'(a) < 0$ si $a > 1 + \sqrt{2}$, podemos concluir que en $a = 1 + \sqrt{2}$ el área es máxima. Además, tenemos que $A(1) = 0$, luego en $a = 1$ el área es mínima.

(c) El área del trozo del triángulo comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$, es

$$F(z) = \begin{cases} \int_0^z (at - t) dt, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{2a}, \\ \frac{a-1}{8a^2} + \int_{1/2a}^z (-at + 1 - t) dt, & \text{si } \frac{1}{2a} \leq z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

El Teorema Fundamental del Cálculo asegura que si $z \in \left[0, \frac{1}{a+1}\right]$,

$$F'(z) = \begin{cases} az - z, & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{1}{2a}, \\ -az + 1 - z, & \text{si } \frac{1}{2a} \leq z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

(d) La función $F'(z)$ es derivable en $\left[0, \frac{1}{2a}\right) \cup \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a+1}\right]$ y su valor es

$$F''(z) = \begin{cases} a-1, & \text{si } 0 \leq z < \frac{1}{2a}, \\ -a-1, & \text{si } \frac{1}{2a} < z \leq \frac{1}{a+1}. \end{cases}$$

En el punto $z = \frac{1}{2a}$, la función $F'(z)$ no es derivable porque la derivada por la izquierda es $a-1$ y la derivada por la derecha es $-a-1$, valores que coinciden si y sólo si $a = 0$.

Ejercicio 2. Se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} - \frac{n}{3^n} \right) x^n.$$

Obtener su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. Consideramos las series de potencias

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} x^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n.$$

Los radios de convergencia de estas series son

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n} = 2,$$
$$R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} \frac{3^{n+1}}{n+1} = 3.$$

Entonces el radio de convergencia de la serie es $R = \min\{2, 3\} = 2$. En el punto $x = -2$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)} - n \left(\frac{-2}{3} \right)^n \right)$$

es divergente porque es la diferencia de una serie divergente y otra convergente. En el punto $x = 2$, tenemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)} - n \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

converge porque es la diferencia de una serie alternada convergente y una serie convergente. En consecuencia, la serie es convergente en el conjunto $(-2, 2]$.

Sabemos que $S(x) = S_1(x) - S_2(x)$ para todo $x \in (-2, 2]$, donde

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{-x}{2} \right)^n, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n.$$

A partir de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2} \right)^n = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{2}{2+x},$$

integrando obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(n+1)} \left(\frac{-x}{2} \right)^{n+1} = 2 \int_0^x \frac{1}{2+t} dt = 2 [\ln(2+x) - \ln(2)] = 2 \ln \left(\frac{2+x}{2} \right).$$

Entonces,

$$2 \ln \left(\frac{2+x}{2} \right) = (-2) \left(\frac{-x}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{-x}{2} \right)^n = x S_1(x).$$

A partir de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x},$$

derivando obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1} = \frac{3}{(3-x)^2},$$

lo que implica que

$$\frac{3x}{(3-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^n = S_2(x).$$

Finalmente,

$$S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{2}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \frac{3x}{(3-x)^2}.$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen 3 de Septiembre de 2001

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Se considera la superficie

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 3 \right\}.$$

Obtener el plano tangente a dicha superficie en el punto $(1, 2, 3)$.

Encontrar el punto de S para el que se hace mínima la suma de las coordenadas $f(x, y, z) = x + y + z$, obteniendo dicho valor.

Solución.

La ecuación implícita de la superficie es

$$F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 3 = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales $F_x = -x^{-2}$, $F_y = -2y^{-2}$, $F_z = -3z^{-2}$, luego

$$F_x(1, 2, 3) = -1, \quad F_y(1, 2, 3) = -\frac{1}{2}, \quad F_z(1, 2, 3) = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto, el plano tangente a S en el punto $(1, 2, 3)$ es

$$-(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 2) - \frac{1}{3}(z - 3) = 0 \iff x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 3.$$

Debemos resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min f(x, y, z) \\ &\text{sujeto } g(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

donde $f(x, y, z) = x + y + z$ y $g(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 3$. El teorema de los multiplicadores de Lagrange asegura que en el punto de S en el se alcanza un extremo para f existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifica la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$. Entonces

$$(1, 1, 1) = \lambda \left(-\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{y^2}, -\frac{3}{z^2} \right),$$

lo que implica

$$x^2 = -\lambda, \quad \frac{y^2}{2} = -\lambda, \quad \frac{z^2}{3} = -\lambda.$$

Por lo tanto

$$x^2 = \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{3},$$

luego tenemos que $y^2 = 2x^2$, $z^2 = 3x^2$. En consecuencia

$$y = x\sqrt{2}, \quad z = x\sqrt{3},$$

porque $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. La ecuación $g(x, y, z) = 0$ implica que

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x\sqrt{2}} + \frac{3}{x\sqrt{3}} = 3 \iff \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = 3,$$

por lo que las coordenadas del extremo condicionado son

$$x^* = \frac{1}{3} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad y^* = \frac{\sqrt{2}}{3} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}), \quad z^* = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

La suma de las coordenadas en este punto es

$$f(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{3} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2.$$

En el punto $(1, 2, 3) \in S$ la función

$$f(1, 2, 3) = 6 > \frac{1}{3} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2,$$

luego el extremo condicionado obtenido es un mínimo.

Ejercicio 4. Se considera el sólido V limitado en el primer octante por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la frontera S del sólido V , directamente y usando el teorema de Gauss.

Solución. El teorema de la divergencia de Gauss afirma que *el flujo de salida de F a través de S coincide con la integral triple de la divergencia de F* , es decir

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz,$$

donde V es el sólido dado. Para calcular la integral triple, usaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Las ecuaciones del cambio de coordenadas son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z,$$

donde $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y el determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r.$$

Entonces, $V = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq 5\}$. Dado que $\operatorname{div}(F) = z + 3$, el flujo de salida de F a través de S es

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(F) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^5 (z + 3) r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \left[\frac{z^2}{2} + 3z \right]_0^5 \\ &= \pi \left(\frac{25}{2} + 15 \right) = \frac{55\pi}{2}. \end{aligned}$$

Para calcular el flujo a través de la frontera S , calculamos el flujo a través de las cinco superficies siguientes:

1. La superficie cilíndrica, parametrizada por $S(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, z)$, donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq 5$. El producto vectorial fundamental es

$$S_\theta \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 \operatorname{sen} \theta & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 0).$$

En el punto $S(0, 1) = (2, 0, 1)$, el vector $S_\theta \times S_z(0, 1) = (2, 0, 0)$ apunta hacia el exterior de V , luego la normal exterior tiene el mismo sentido que $S_\theta \times S_z$.

Calculamos

$$\begin{aligned} F(S(\theta, z)) \cdot (S_\theta \times S_z) &= (4 \operatorname{sen} \theta, 2z \operatorname{sen} \theta, 3z) \cdot (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, 0) \\ &= 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 4z \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 4 (\operatorname{sen} 2\theta + z \operatorname{sen}^2 \theta). \end{aligned}$$

Entonces, el flujo de F a través de esta superficie es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^5 (\operatorname{sen} 2\theta + z \operatorname{sen}^2 \theta) \, dz \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(5 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{25}{2} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right) d\theta \\ &= 20 \left[\frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} + 50 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ &= 20 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + 50 \frac{\pi}{4} \\ &= 20 + \frac{25\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. El rectángulo contenido en el plano $y = 0$, parametrizado mediante $S(x, z) = (x, 0, z)$, donde $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 5$. El producto vectorial

$$S_x \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0),$$

tiene el mismo sentido que la normal exterior. El flujo de F es

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \int_0^2 \int_0^5 (0, 0, 3z) \cdot (0, -1, 0) \, dz \, dx = 0.$$

3. El rectángulo contenido en el plano $x = 0$, parametrizado mediante $S(y, z) = (0, y, z)$, donde $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 5$. El producto vectorial

$$S_y \times S_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0),$$

tiene sentido opuesto a la normal exterior. El flujo de F es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= - \int_0^2 \int_0^5 (2y, zy, 3z) \cdot (1, 0, 0) \, dz \, dy \\ &= - \int_0^2 \int_0^5 2y \, dz \, dy = -5 [y^2]_0^2 = -20. \end{aligned}$$

4. El sector circular contenido en el plano $z = 0$, parametrizado mediante $S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$, donde $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. El producto vectorial

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

tiene sentido opuesto a la normal exterior. El flujo de F es

$$\iint_S F \cdot n \, dS = - \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r \sin \theta, 0, 0) \cdot (0, 0, r) \, dr \, d\theta = 0.$$

5. El sector circular contenido en el plano $z = 5$, parametrizado mediante $S(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 5)$, donde $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. El producto vectorial

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r),$$

tiene el mismo sentido que la normal exterior. El flujo de F es

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2r \sin \theta, 5r \sin \theta, 15) \cdot (0, 0, r) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 15r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{15r^2}{2} \right]_0^2 = 15\pi. \end{aligned}$$

En consecuencia, el flujo de F a través de la frontera de V viene dado por la suma de los cinco flujos anteriores,

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 20 + \frac{25\pi}{2} - 20 + 15\pi = \frac{55\pi}{2}.$$