CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 7 de Julio de 2000

PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Entre todos los rectángulos del plano YOZ, inscritos en la parábola $z = a^2 - y^2$ (siendo $a > 0$) y con base en el eje OY (ver figura 1, en la página 2), calcular el que tiene área máxima. Justificar la respuesta. Para cada valor $x_0 \in [0,1]$, consideremos la parábola del tipo anterior contenida en el plano $x = x_0$ y cuyo vértice está en el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$. Construimos el sólido cuya sección con cada plano $x = x_0$ es el rectángulo de área máxima inscrito en la parábola considerada en dicho plano (ver figura 2, en la página 2). Calcular el volumen de dicho sólido.

Solución. El área del rectángulo, inscrito en la parábola $z = a^2 - y^2$, es

$$A(y) = 2y\left(a^2 - y^2\right) = 2a^2y - 2y^3, \quad 0 \leq y \leq a.$$

Los puntos interiores, candidatos a extremos, verifican

$$0 = A'(y) = 2a^2 - 6y^2 = 2\left(a^2 - 3y^2\right) \Longleftrightarrow y = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Evaluamos el área en el punto crítico y en los puntos $y = 0,\ y = a$, obteniendo

$$A\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2a^3}{\sqrt{3}} - \frac{2a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4a^3}{3\sqrt{3}} > A(0) = A(a) = 0.$$

Entonces, el área máxima se alcanza en $y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, siendo $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}$, donde a^2 es la distancia del origen al vértice de la parábola.

A continuación, calculamos el volumen, integrando el área $A(x)$ de cada sección en el intervalo $[0,1]$. Dado que el vértice de cada parábola está en el segmento $x + z = 1,\ 0 \leq x \leq 1$, la distancia del plano $z = 0$ al vértice es $z = 1 - x$. Usando el resultado anterior, el área máxima es

$$A(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

En consecuencia, el volumen pedido es

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \frac{4}{3\sqrt{3}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left[-\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{15\sqrt{3}}.$$

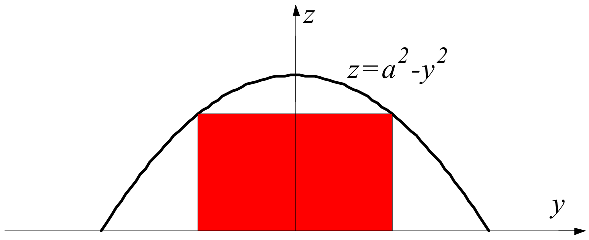


Figura 1

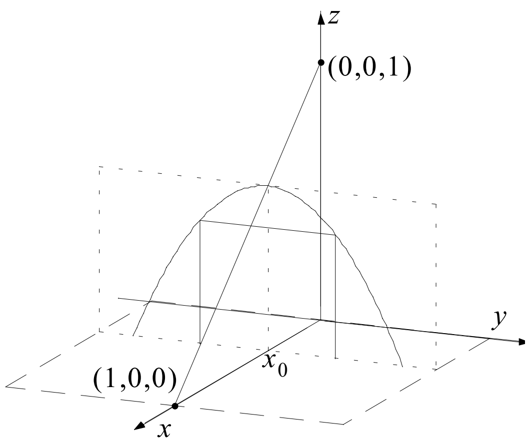


Figura 2

Ejercicio 2. Se considera la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - n\right) x^n$. Calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

Solución. Calculamos el radio de convergencia mediante

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - n}{2^{n+2} - (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \dfrac{n}{2^{n+1}}}{2 - \dfrac{n+1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}.$$

Entonces, la serie es absolutamente convergente para $x \in (-1/2, 1/2)$, divergente para $|x| > 1/2$, y debemos analizar que ocurre en los puntos $x = 1/2$ y $x = -1/2$. En primer lugar, si $x = 1/2$, el término general es

$$\left(2^{n+1} - n\right) x^n = \frac{2^{n+1} - n}{2^n} = 2 - \frac{n}{2^n}$$

que no tiende a cero, sino a 2, por lo que la serie no es convergente. En el otro extremo, por igual razón, el valor absoluto del término general tiende a 2, en lugar de tender a cero, y tambien resulta una serie no convergente. En conclusión, el dominio de convergencia de la serie dada es el intervalo abierto $(-1/2, 1/2)$.

Para calcular la función $s(x)$, suma de la serie en el intervalo de convergencia, descomponemos $s(x) = s_1(x) - s_2(x)$, donde

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n, \quad s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n.$$

Para sumar la primera serie, basta observar que es una serie geométrica de razón $2x$ y primer término 2, por lo que,

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\, (2\,x)^n = \frac{2}{1-2x}.$$

Para sumar la segunda serie, tenemos que

$$s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Finalmente, resulta

$$s(x) = s_1(x) - s_2(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2 - 5x + 4x^2}{(1-2x)\,(1-x)^2}.$$

Ejercicio 3. Obtener la ecuación en que se transforma la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

donde $u = u(x, y)$, con el cambio a coordenadas polares $x = r\cos t,\ y = r\operatorname{sen} t$.

Solución. Usando la regla de la cadena, calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos t + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t,\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\operatorname{sen} t) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos t).
\end{aligned}$$

A continuación, y suponiendo que las derivadas cruzadas coinciden, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 t + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\operatorname{sen} t\cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2 t.\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) r\operatorname{sen} t - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos t + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) r\cos t - \frac{\partial u}{\partial y} r\operatorname{sen} t\\
&= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\operatorname{sen} t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(r\cos t)\right) r\operatorname{sen} t - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos t\\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(-r\operatorname{sen} t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r\cos t)\right) r\cos t - \frac{\partial u}{\partial y} r\operatorname{sen} t\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\operatorname{sen}^2 t - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2\operatorname{sen} t\cos t + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2 t - r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos t + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen} t\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Por tanto, la ecuación de Laplace, en coordenadas polares, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ejercicio 4. Sea C una curva cerrada simple que encierra una región D.
(a) Demostrar, usando el teorema de Green, que

$$\acute{a}rea\,(D) = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

(b) Usando una de las anteriores integrales de línea, calcular el área del interior de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Solución. **(a)** El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Si elegimos $(P, Q) = (0, x)$, entonces

$$\oint_C x\,dy = \iint_D dx\,dy = \acute{a}rea\,(D)\,.$$

Si elegimos $(P, Q) = (-y, 0)$, entonces

$$\oint_C -y\,dx = \iint_D dx\,dy = \acute{a}rea\,(D)\,.$$

Usando los dos resultados, obtenemos

$$\oint_C x\,dy - y\,dx = \oint_C x\,dy + \oint_C -y\,dx = 2\,\acute{a}rea\,(D)\,.$$

(b) Parametrizamos la elipse de semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{5}$, mediante

$$\mathbf{r}\,(t) = \left(2\cos(t)\,, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(t)\right), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Entonces $x\,(t) = 2\cos(t)\,,\ \ y\,(t) = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,(t)\,,$ luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{5}\cos^2(t) + 2\sqrt{5}\,\mathrm{sen}^2(t)\right)\,dt\\ &= \sqrt{5}\int_0^{2\pi} dt\\ &= 2\sqrt{5}\pi.\end{aligned}$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 7 de Julio de 2000

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 5. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Obtener las funciones derivadas f' y f'', junto con sus respectivos dominios.
(b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de f, en $x = 0$ y $x = 1/2$.
(c) Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 de f, centrados en $x = 0$ y $x = 1/2$, cuando existan. Estudiar si f alcanza un extremo en $x = 1/2$ y, en ese caso, clasificarlo.

Solución. **(a)** Si $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \\ &= 1 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

Si $x = 0$, calculamos el límite

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - h^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{h}\right)}{h} \\ &= 1 - \lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{\pi}{h}\right) = 1. \end{aligned}$$

Calculamos la derivada segunda, para $x \neq 0$,

$$f''(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{2\pi}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi^2}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

En el punto $x = 0$, el cociente incremental para f' es

$$\frac{f'(h) - f'(0)}{h} = -2\cos\left(\frac{\pi}{h}\right) - \frac{\pi}{h}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{h}\right).$$

El límite de la expresión anterior no existe cuando $h \to 0$. Por ello, f no tiene derivada segunda en $x = 0$.

Los dominios de f' y f'' son, respectivamente, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) La recta tangente en $x = 0$, es

$$y = f(0) + f'(0)\,x = x.$$

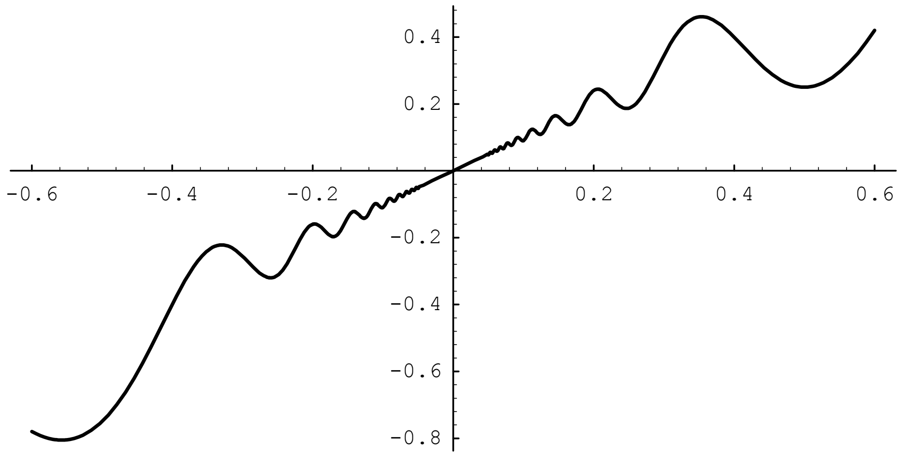
La recta tangente en $x = \dfrac{1}{2}$, es

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(c) Como f no tiene derivada segunda en $x = 0$, no existe polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x = 0$. En el punto $x = \dfrac{1}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(2\pi^2 - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Dado que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ y $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, *la función f tiene un mínimo local estricto en $x = \dfrac{1}{2}$.*



Gráfica de la función f

Ejercicio 6. Calcular, con un error menor que 0.01, un valor aproximado de la integral

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} x^2 \, dx,$$

utilizando la regla de Simpson.

Solución. Calculamos las cuatro primeras derivadas de la función integrando para obtener una cota del error cometido al aproximar con la regla de Simpson.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x^2, \\
f'(x) &= 2x \cos x^2, \\
f''(x) &= 2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2, \\
f'''(x) &= -12x \operatorname{sen} x^2 - 8x^3 \cos x^2, \\
f^{(4)}(x) &= -12 \operatorname{sen} x^2 - 48x^2 \cos x^2 + 16x^4 \operatorname{sen} x^2.
\end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en encontrar un cota de la derivada cuarta, en el intervalo de integración,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(4)}(x)\right| &\leq 12 \left|\operatorname{sen} x^2\right| + 48x^2 \left|\cos x^2\right| + 16x^4 \left|\operatorname{sen} x^2\right| \\
&\leq 12 + 48\frac{\pi}{2} + 16\frac{\pi^2}{4} \\
&\leq 12 + 24\pi + 4\pi^2 < 127.
\end{aligned}$$

La fórmula de la cota del error asegura que

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max\left|f^{(4)}(x)\right| < \frac{127\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2}}{180n^4} < \frac{2.1819}{n^4}.$$

Para conseguir que $|E| < 0.01$, es suficiente que n sea tal que $\dfrac{2.1819}{n^4} \leq 0.01$, o lo que es igual, que $n^4 \geq 218.19$. Dado que $3^4 = 81$, $4^4 = 256$, elegimos el menor entero que satisface la desigualdad, es decir $n = 4$. Aplicando la fórmula de Simpson,

$$I \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right],$$

a nuestro problema, tenemos que $h = (b-a)/4 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}/4$, luego

$$I \approx \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{12}\left[0 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 2\operatorname{sen}\left(2\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 4\operatorname{sen}\left(3\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)^2 + 1\right] = 0.5483.$$

Las fórmulas de cuadratura de `MATLAB` nos proporcionan $I = 0.549276\ldots$, lo que indica que el error cometido es, aproximadamente, una milésima.

Ejercicio 7. Hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ y la recta $x + y = 5$.

Solución. Los semiejes de la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ son $a = \sqrt{6}$ y $b = \sqrt{3}$. Por ello, todos los puntos de la elipse están en el semiplano $x + y < 5$. Entonces, la distancia d entre un punto $P = (x, y)$ de la elipse y la recta $x + y - 5 = 0$, es

$$d(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{5 - x - y}{\sqrt{2}}.$$

Para encontrar los extremos de la distancia de la recta a la elipse, definimos la función lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = \frac{5 - x - y}{\sqrt{2}} + \lambda\left(x^2 + 2y^2 - 6\right).$$

Las condiciones necesarias para extremos condicionados son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + 2y^2 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones implican

$$2\lambda x = 4\lambda y = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

luego $\lambda \neq 0, \quad x = 2y$. Entonces, la ecuación $x^2 + 2y^2 = 6$, implica $6y^2 = 6$, por lo que $y = \pm 1$. En consecuencia, hemos obtenido los puntos $P_1 = (2, 1)$ y $P_2 = (-2, -1)$.

Finalmente, evaluamos la distancia a la recta en los dos puntos para determinar los valores mayor y menor,

$$\begin{aligned} d(P_1) &= \frac{5 - 3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ d(P_2) &= \frac{5 + 3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La distancia mínima se alcanza en $P_1 = (2, 1)$ y es $\sqrt{2}$, y la distancia máxima se alcanza en $P_2 = (-2, -1)$ y es $4\sqrt{2}$.

Ejercicio 8. Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, a través de la porción del cilindro parabólico $z=x^2$, limitada por los planos $z=a^2$ $(a>0)$, $y=0,\ y=b>0$, orientada de forma que la componente z de la normal sea negativa. Comprobar el resultado, utilizando el teorema de la divergencia.

Solución. Teniendo en cuenta que $z=x^2\leq a^2$ implica que $|x|\leq a$, usaremos la parametrización dada por $S(x,y)=(x,y,x^2)$, donde $-a\leq x\leq a,\quad 0\leq y\leq b$. En primer lugar, obtenemos un vector paralelo al vector normal $\mathbf{n}$ mediante

$$S_x\times S_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-2x,0,1).$$

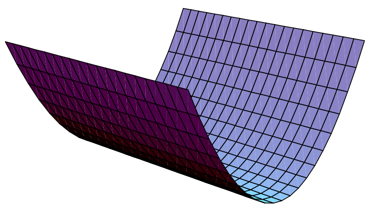
Observemos que $S_x\times S_y$ tiene componente z positiva, luego tiene sentido opuesto a $\mathbf{n}$. Por tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} &= \mathbf{F}\left(S\left(x,y\right)\right)\cdot\left(S_x\times S_y\right)(x,y)\ dx\,dy\\ &=-\left(x,y,x^2\right)\cdot(-2x,0,1)\ dx\,dy\\ &=x^2\,dx\,dy.\end{aligned}$$

La integral de flujo a través de S, es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S}=\int_{-a}^{a}\int_0^b x^2\,dx\,dy=b\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{2}{3}a^3b.$$

Colocando un techo T y dos paredes laterales P^1 y P^2 a la superficie S, de forma que $S\cup T\cup P^1\cup P^2$ sea la frontera del sólido Ω, podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss.



La superficie S

El flujo de $\mathbf{F}$ a través de S, con la normal exterior $\mathbf{n}$, es $flu(S)=\dfrac{2}{3}a^3b$. A continuación, calculamos los flujos exteriores a través del techo T y las paredes P^1 y P^2. El techo $T(x,y)=(x,y,a^2)$, donde $-a\leq x\leq a,\quad 0\leq y\leq b$. Entonces, $T_x\times T_y=(0,0,1)$ tiene orientación exterior, por lo que

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S}=\left(x,y,a^2\right)\cdot(0,0,1)\ dx\,dy=a^2\,dx\,dy.$$

La integral de flujo es

$$flu(T) = \iint\limits_{T} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{b} a^2\,dx\,dy = a^2 b\,[x]_{-a}^{a} = 2a^3 b.$$

La pared $P^1(x,z) = (x,0,z)$, donde $-a \le x \le a,\quad x^2 \le z \le a^2$. Entonces, $P_x^1 \times P_z^1 = (0,-1,0)$ tiene orientación exterior. Por tanto

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = (x,0,z)\cdot(0,-1,0)\;dx\,dz = 0.$$

La integral de flujo es $flu\,(P^1) = 0$. Finalmente, la pared P^2 viene dada por $P^2(x,z) = (x,b,z)$, donde $-a \le x \le a,\quad x^2 \le z \le a^2$. Entonces, el producto vectorial $P_x^2 \times P_z^2 = (0,-1,0)$ tiene orientación interior. Por tanto,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = -\,(x,b,z)\cdot(0,-1,0)\;dx\,dz = b.$$

La integral de flujo es

$$\begin{aligned} flu\left(P^2\right) &= \iint_{P^2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{S} = \int_{-a}^{a}\int_{x^2}^{a^2} b\,dz\,dx = b\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)\,dx \\ &= b\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = b\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3 b. \end{aligned}$$

El flujo exterior a través de la frontera del sólido Ω es la suma

$$flu(S) + flu(T) + flu\left(P^1\right) + flu\left(P^2\right) = \frac{2}{3}a^3 b + 2a^3 b + \frac{4}{3}a^3 b = 4a^3 b.$$

La divergencia del campo es $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$. Calculamos directamente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F})\;dx\,dy\,dz &= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{b}\int_{x^2}^{a^2} 3\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{b} 3\left(a^2 - x^2\right)\,dy\,dx \\ &= 3b\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)\,dx \\ &= 4a^3 b. \end{aligned}$$

El resultado queda comprobado porque el teorema de Gauss afirma que *el flujo exterior a través de la frontera de Ω coincide con la integral triple de la divergencia del campo* $\mathbf{F}$.

◄★► ◄★► ◄★► ◄★► ◄★► ◄★►