

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación  
Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2000  
PRIMERA PARTE

**Ejercicio 1.** Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinar, de entre los triángulos isósceles inscritos en dicha elipse, con un vértice en el punto  $(0, b)$  y base paralela al eje  $OX$ , el que tenga área máxima.

---

**Solución.** Sea  $(x, y)$  un punto de la elipse. Entonces, el área del triángulo de vértices  $(0, b)$ ,  $(-x, y)$ ,  $(x, y)$  es  $A = bh/2 = x(b - y)$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Dado que  $x = a\sqrt{1 - (y/b)^2}$  obtenemos  $A(y) = (a/b)\sqrt{b^2 - y^2}(b - y)$ , donde  $y \in [-b, b]$ . Calculamos la derivada en el intervalo abierto  $(-b, b)$ ,

$$\begin{aligned} A'(y) &= \frac{a}{b} \left[ \frac{1}{2} (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2y)(b - y) - (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{a}{b} \left[ \frac{-y(b - y) - (b^2 - y^2)}{(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{a}{b} \left[ \frac{(b - y)(-y - (b + y))}{(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{a}{b} \left[ \frac{(b - y)(-2y - b)}{(b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Si  $A'(y) = 0$ , entonces  $2y = -b$ , luego el *único* punto crítico en el intervalo  $(-b, b)$  es  $y^* = -b/2$ . Observemos que si  $-b < y < -b/2$ , entonces  $0 < -2y - b$ . Si  $-b/2 < y < b$ , entonces  $-2y - b < 0$ . Por lo tanto,  $A'(y)$  cambia en  $y^*$  de positivo a negativo y el criterio de la primera derivada asegura que  $A(y^*)$  es un máximo relativo. Además,  $A(-b) = A(b) = 0$ , y el área es una función no negativa. En consecuencia,  $A(y^*)$  es el único máximo absoluto de  $A(y)$  en el intervalo cerrado  $[-b, b]$ .

La coordenada  $x^* = a\sqrt{1 - (y^*/b)^2} = a\sqrt{1 - 1/4} = a\sqrt{3}/2$ . Los vértices del triángulo isósceles de área máxima son

$$(0, b), \left( -\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{b}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{b}{2} \right).$$

El área máxima es

$$A(y^*) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} \left( b + \frac{b}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} ab.$$

**Ejercicio 2.** Se desea calcular un punto crítico de la función  $x \cos x$ . Aplicar el Método de Newton a la función adecuada para obtener, partiendo de  $x_0 = 1$ , dos cifras decimales del punto crítico buscado. Explicar todos los pasos realizados.

---

**Solución.** Los puntos críticos de una función son aquellos en que la derivada se anula o bien no existe. Para la función dada, que es indefinidamente derivable en toda la recta real, serán los ceros de su derivada, que es la función

$$f(x) = \frac{d}{dx} (x \cos x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$$

Notemos, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0, \\ f(1) &= \cos 1 - \operatorname{sen} 1 = -0.30117 < 0, \end{aligned}$$

y que para  $x \in (0, 1)$ , por ser  $\cos x > 0$ ,  $\operatorname{sen} x > 0$ ,  $x > 0$ , se verifica

$$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x - x \cos x < 0.$$

Por tanto existe un único  $c \in (0, 1)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Intentaremos aplicar, por tanto, el Método de Newton para calcular un cero de la función  $f(x)$  tomando como punto inicial el dado. Se tiene, como hemos dicho,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x - x \operatorname{sen} x, \\ f'(x) &= -2 \operatorname{sen} x - x \cos x, \end{aligned}$$

de donde, para  $x_0 = 1$ ,

$$\begin{aligned} f(1) &= \cos 1 - \operatorname{sen} 1 = -0.30117, \\ f'(1) &= -2 \operatorname{sen} 1 - \cos 1 = -2.2232, \end{aligned}$$

y, finalmente resulta, para la primera iteración,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-0.30}{-2.22} = 0.86453 \simeq 0.86$$

Para realizar la segunda iteración calculamos

$$\begin{aligned} f(0.86) &= 6.9286 \times 10^{-4}, \\ f'(0.86) &= -2.0768, \end{aligned}$$

de donde

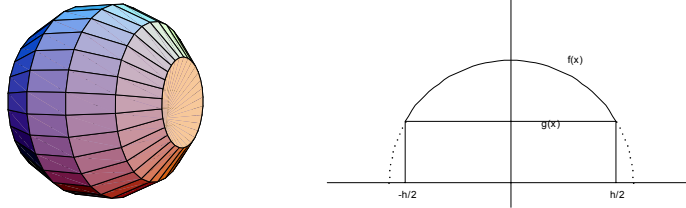
$$x_2 = 0.86 - \frac{f(0.86)}{f'(0.86)} = 0.86033 \simeq 0.86.$$

Al repetirse las dos primeras cifras decimales, las damos por buenas y detenemos los cálculos.

**Ejercicio 3.** Se perfora una esfera de radio  $r$  con un agujero cilíndrico (ver figura) de modo que el anillo esférico resultante tiene altura  $h$ .

1. Probar que el volumen del anillo es  $V = \pi h^3/6$ .
2. Calcular la superficie total del anillo.

**Solución.** El cuerpo se genera al girar una porción de circunferencia alrededor de un diámetro de la misma. Situaremos el eje de giro en el eje  $OX$ . Si se sitúa en el eje  $OY$ , la solución se obtiene de un modo semejante.



La función  $f(x)$  está definida por la ecuación de la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$ , es decir  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . La función  $g(x) = f(h/2) = \sqrt{r^2 - (h^2/4)}$  es constante.

1. Aplicamos la fórmula habitual para el cálculo de un volumen de revolución:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} (f(x)^2 - g(x)^2) dx = \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left( r^2 - x^2 - r^2 + \frac{h^2}{4} \right) dx \\ &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - x^2 \right) dx = \pi \left( \frac{h^2}{4}x - \frac{x^3}{3} \right)_{-h/2}^{h/2} = \pi \left( \frac{h^3}{4} - \frac{2h^3}{24} \right) = \frac{\pi h^3}{6}. \end{aligned}$$

2. El área total se obtiene como la suma de las del cilindro y la superficie esférica. El área del cilindro  $S_c$  es  $2\pi R_c h$ , donde el radio del cilindro es  $R_c = \sqrt{r^2 - (h^2/4)}$ . Por tanto,  $S_c = 2\pi h \sqrt{r^2 - (h^2/4)} = \pi h \sqrt{4r^2 - h^2}$ . El área de la superficie esférica  $S_e$  se calcula con la fórmula habitual que requiere el cálculo de  $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ :

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Finalmente, aplicamos la fórmula del área de una superficie de revolución:

$$\begin{aligned} S_e &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} r dx = 2\pi r h. \end{aligned}$$

El área total será, por tanto  $S = S_c + S_e = \pi h (2r + \sqrt{4r^2 - h^2})$ .

## CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación  
Primer Examen Parcial. 26 de Enero de 2000  
SEGUNDA PARTE

### Ejercicio 4.

1. Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias.
2. Estudiar la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{\infty} x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} dx$$

según los valores de  $k \in \mathbb{R}$ .

---

**Solución.** Sea  $I = I_1 + I_2$ , donde

$$I_1 = \int_0^1 x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} dx, \quad I_2 = \int_1^{\infty} x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} dx.$$

Para analizar la convergencia de  $I_1$ , usaremos que  $x + \operatorname{sen} x \approx 2x$ . Además

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} \text{ implica que } x - \operatorname{sen} x \approx \frac{x^3}{3!}.$$

Teniendo en cuenta el criterio de comparación por paso al límite, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^k \left( \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \right)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^k \left( \frac{2x}{x^3/3!} \right)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{12x^{k-2}}{x^a} = 12,$$

si  $a = k - 2$ . Entonces, el carácter de  $I_1$  es el mismo que la integral  $\int_0^1 x^{k-2} dx$ . Dado que esta última integral converge si y sólo si  $k - 2 > -1 \Leftrightarrow k > 1$ , tenemos que  $I_1$  converge si y sólo si  $k > 1$ .

Para analizar la convergencia de  $I_2$ , calculamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (\operatorname{sen} x/x)}{1 - (\operatorname{sen} x/x)} = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k \left( \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \right)}{x^a} = 1,$$

si  $a = k$ . En consecuencia, el carácter de  $I_2$  es el mismo que la integral  $\int_1^{\infty} x^k dx$ , que converge si y sólo si  $k < -1$ .

La intersección de los intervalos de convergencia de  $I_1$  y  $I_2$  es vacía, luego *no existen* valores de  $k$  tales que la integral  $I$  sea convergente.

### Ejercicio 5.

1. Enunciar el Teorema de Taylor.
2. Determinar el grado del polinomio de Taylor en  $\pi/3$  que es necesario para calcular  $\cos(61^\circ)$  con un error menor que  $10^{-3}$  y obtener dicho valor.

---

**Solución.** Para el apartado 2, comenzaremos escribiendo el desarrollo mediante el polinomio de Taylor y el correspondiente resto para  $f(x) = \cos x$  en  $\frac{\pi}{3}$ . Por el teorema de Taylor, al ser el coseno una función indefinidamente derivable en toda la recta real, sabemos que, dado un  $x$  y un  $n \geq 0$ , existe un  $c$  entre  $\frac{\pi}{3}$  y  $x$  tal que:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &= \cos \frac{\pi}{3} - \left( \sin \frac{\pi}{3} \right) \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2!} \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \sin \frac{\pi}{3} \right) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^4 - \dots \\ &+ \frac{1}{n!} f^{(n)} \left( \frac{\pi}{3} \right) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

El error que se comete al adoptar como valor de la función el que tome el polinomio de Taylor viene dado por el resto. Para acotar el valor absoluto de dicho error, basta notar que las sucesivas derivadas del coseno son, salvo el signo, senos o cosenos, y por tanto permanecen acotadas en valor absoluto por 1 en toda la recta real. Por tanto:

$$|\text{error}(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left| x - \frac{\pi}{3} \right|^{n+1}.$$

Para  $x = 61^\circ = \frac{61\pi}{180}$  radianes, buscamos un valor de  $n$  que garantice que

$$\frac{1}{(n+1)!} \left| x - \frac{\pi}{3} \right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left| \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} \right|^{n+1} < \frac{1}{1000}$$

es decir, tal que

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{61}{180} - \frac{1}{3} \right)^{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)! 180^{n+1}} < \frac{1}{1000}$$

o, lo que es lo mismo,  $(n+1)! (180/\pi)^{n+1} > 1000$ . Por tanto es suficiente que sea  $n = 1$ , ya que  $2 \cdot (180/\pi)^2 > 2 \cdot 57^2 = 6498 > 1000$ .

Finalmente resulta

$$\begin{aligned} \cos(61^\circ) &= \cos \left( \frac{61\pi}{180} \right) \simeq \cos \frac{\pi}{3} - \left( \sin \frac{\pi}{3} \right) \left( \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{180} \right) = 0.48489. \end{aligned}$$

Como comprobación, el verdadero valor es  $\cos(\frac{61\pi}{180}) = 0.48481$ .

**Ejercicio 6.** Obtener el desarrollo en serie de Taylor en 0 de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

indicando el dominio de convergencia. (Utilizar descomposición en fracciones simples)

---

**Solución.** En primer lugar, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Simplificando y multiplicando por  $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ , obtenemos

$$2x - 5 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Ahora, para calcular los valores de  $A$  y de  $B$ , damos a  $x$  los valores  $x = 2$ ,  $x = 3$ :

$$x = 2 \Rightarrow -1 = -A \Rightarrow A = 1,$$

$$x = 3 \Rightarrow 1 = B.$$

Finalmente, operamos con la descomposición, para poder usar la serie geométrica:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (x/2)} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (x/3)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n \\ &= \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$

Como  $f(x)$  se expresa como la serie de potencias  $\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$ , el teorema de unicidad garantiza que dicha serie es la serie de Taylor de  $f(x)$ .

Usando el criterio del cociente, obtenemos el radio de convergencia  $R = 2$ . En los extremos  $x = \pm 2$ , tenemos que no se cumple la condición necesaria de convergencia de series porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) 2^n = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Entonces, el dominio de convergencia es  $(-2, 2)$ .

