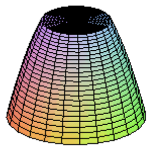
CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen del 14 de Septiembre de 2000
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Un flan tiene forma de tronco de paraboloide de revolución, siendo r y $2r$ los radios de sus bases y h su altura. Determinar su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.



Solución. Sea $z(x) = ax^2 + bx + c$, una parábola, contenida en el plano $y = 0$, que genera el paraboloide. Sabemos que tiene su vértice en el eje OZ y que pasa por los puntos $(r, 0, h)$ y $(2r, 0, 0)$. En $x = 0$ hay una tangente horizontal, por lo que $0 = z'(0) = b$. Entonces, la parábola es $z(x) = ax^2 + c$.

Además, tenemos que $ar^2 + c = h$, y que $4ar^2 + c = 0$. Estas ecuaciones implican $3ar^2 = -h$, luego

$$a = -\frac{h}{3r^2}, \quad c = -4ar^2 = \frac{4h}{3}.$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es

$$z(x) = -\frac{h}{3r^2}x^2 + \frac{4h}{3} = \frac{h}{3}\left(4 - \frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{h}{3r^2}\left(4r^2 - x^2\right).$$

Para calcular el volumen del flan, observamos que

$$x^2 = 4r^2 - \frac{3r^2}{h}z,$$

por lo que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 dz = \pi \int_0^h \left(4r^2 - \frac{3r^2}{h}z\right) dz \\ &= \pi \left(4r^2 h - \frac{3r^2h^2}{2h}\right) = \left(4 - \frac{3}{2}\right)\pi r^2 h \\ &= \frac{5}{2}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

Para calcular el volumen de la porción, integramos el área $A(x)$ de las secciones obtenidas al cortar el flan con planos paralelos al plano $x=0$, entre r y $2r$. Dichas secciones son parábolas con vértices en los puntos $(x,0,z(x))$ y que pasan por los puntos $\left(x,\pm\sqrt{4r^2-x^2},0\right)$. Denotando $\beta(x)=\sqrt{4r^2-x^2}$, la ecuación de estas parábolas es $Z(x,y)=py^2+q$, donde

$$z(x)=Z(x,0)=q,\quad 0=Z(x,\pm\beta(x))=p\beta^2(x)+q.$$

Entonces, $p=-\dfrac{z(x)}{\beta^2(x)}$, y la ecuación del paraboloide de revolución es

$$\begin{aligned}Z(x,y)&=-\frac{z(x)}{\beta^2(x)}y^2+z(x)\\&=z(x)\left(1-\frac{y^2}{\beta^2(x)}\right)\\&=\frac{h}{3r^2}\left(4r^2-x^2\right)\left(\frac{4r^2-x^2-y^2}{4r^2-x^2}\right)\\&=\frac{h}{3r^2}\left(4r^2-x^2-y^2\right).\end{aligned}$$

Usando la simetría de la parábola $Z=py^2+q$, su área es

$$\begin{aligned}A(x)&=2\int_0^{\beta(x)}\left(py^2+q\right)dy\\&=2\left[p\frac{y^3}{3}+qy\right]_0^{\beta(x)}\\&=2\left(-\frac{z(x)}{\beta^2(x)}\frac{\beta^3(x)}{3}+z(x)\beta(x)\right)\\&=\frac{4}{3}z(x)\beta(x)\\&=\frac{4h}{9r^2}\left(4r^2-x^2\right)\sqrt{4r^2-x^2}.\end{aligned}$$

El volumen de la porción del flan viene dado por

$$V_P=\frac{4h}{9r^2}\int_r^{2r}\left(4r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Usaremos el cambio de variable $x=2r\operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$, para calcular

$$\begin{aligned}\int_r^{2r}\left(4r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\,dx&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4r^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}2r\cos\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2r\cos\theta\right)^4\,d\theta\\&=16r^4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

Desarrollando el integrando

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[1+2\cos 2\theta+\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right),
\end{aligned}$$

calculamos la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta &= \frac{1}{8}\left[3\theta+2\operatorname{sen} 2\theta+\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{8}\left[3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen de la porción es

$$\begin{aligned}
V_P &= \frac{4h}{9r^2}\frac{16r^4}{8}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \frac{8r^2h}{9}\left(\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \left(\frac{8}{9}\pi-\sqrt{3}\right)r^2h.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia de

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{\left(x^2+1\right)^{n+3}} dx, \quad n \geq 1.$$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$, para $n \geq 2$. Calcular I_1, I_2 y I_3.

Solución. La integral dada sólo presenta problema debido al intervalo infinito (primera especie) ya que el integrando es continuo en toda la recta real (función racional cuyo denominador no se anula nunca). Puesto que el integrando es positivo y, para $x \to \infty$, se comporta como

$$\frac{x^{2n-1}}{\left(x^2+1\right)^{n+3}} \simeq \frac{x^{2n-1}}{x^{2n+6}} \simeq \frac{1}{x^7},$$

cualquiera que sea $n \geq 1$, podemos utilizar el criterio de comparación por paso al límite con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^7}$ para concluir que la integral dada es convergente.

Aplicando integración por partes, con $u = x^{2n-2}$ y $dv = x\left(x^2+1\right)^{-(n+3)} dx$, resulta $du = (2n-2)x^{2n-3}$ y $v = -\frac{1}{2(n+2)}\left(x^2+1\right)^{-(n+2)}$ y, por consiguiente, para cualquier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty u\,dv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\,du \\
&= -\left.\frac{x^{2n-2}}{2(n+2)\left(x^2+1\right)^{(n+2)}}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{(2n-2)x^{2n-3}}{2(n+2)\left(x^2+1\right)^{(n+2)}}\,dx \\
&= 0 + \frac{(n-1)}{(n+2)} \int_0^\infty \frac{x^{2n-3}}{\left(x^2+1\right)^{(n+2)}}\,dx \\
&= \frac{(n-1)}{(n+2)} I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Las integrales cuyo cálculo nos piden son:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x}{\left(x^2+1\right)^4}\,dx = \left.\frac{-1}{6\left(x^2+1\right)^3}\right|_0^\infty = \frac{1}{6},$$

y, aplicándo la fórmula demostrada antes, se obtienen

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^5}\,dx &= I_2 = \frac{1}{4} I_1 = \frac{1}{24}, \\
\int_0^\infty \frac{x^5}{\left(x^2+1\right)^6}\,dx &= I_3 = \frac{2}{5} I_2 = \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n,$$

determinar su radio de convergencia. Estudiar la convergencia en los extremos. Hallar su suma.

Solución. El término general es $a_n = \dfrac{n^3+1}{n}$. Su radio de convergencia es

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{(n+1)^3+1}\right)=1.$$

Entonces, la serie es absolutamente convergente si $|x-1|<1$, es decir, en el intervalo $(0,2)$ y divergente si $|x-1|>1$. En los puntos $x=0$ y $x=2$, los respectivos términos generales no convergen a cero, luego la serie es divergente en ambos puntos. Para calcular la suma de la serie $s(x)$, en el intervalo $(0,2)$, sea $s(x)=s_1(x)+s_2(x)$, donde

$$s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^n,\quad s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n.$$

En primer lugar, calculamos la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n=\frac{1}{1-(x-1)}-1=\frac{1-(2-x)}{2-x}=\frac{x-1}{2-x}.$$

Para obtener la primera suma, derivamos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^{n-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{2-x}\right)\\&=\frac{(2-x)+(x-1)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2},\end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n=\frac{(x-1)}{(2-x)^2}.$$

Derivando de nuevo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^{n-1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{(2-x)^2}\right)\\&=\frac{(2-x)^2+2(2-x)(x-1)}{(2-x)^4}=\frac{x}{(2-x)^3}.\end{aligned}$$

Entonces, la primera suma es

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n = \frac{(x-1)\,x}{(2-x)^3}, \quad 0 < x < 2.$$

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t-1)^n = \frac{t-1}{2-t} \quad 0 < t < 2.$$

Integrando ambos términos en el intervalo con puntos terminales x y 1, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (t-1)^n \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_1^x (t-1)^n \, dt \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} \right]_1^x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} &= \int_1^x \frac{t-1}{2-t} dt \\
&= \int_1^x \left(-1 + \frac{1}{2-t} \right) dt \\
&= \left[-t - \ln(2-t) \right]_1^x \\
&= -x + 1 - \ln(2-x).
\end{aligned}$$

Entonces, la segunda suma es

$$\begin{aligned}
s_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-1)^n = (x-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= (x-1) - x + 1 - \ln(2-x) \\
&= -\ln(2-x),
\end{aligned}$$

donde $0 < x < 2$. En conclusión, la suma de la serie, en el intervalo $(0, 2)$, es

$$s(x) = \frac{(x-1)\,x}{(2-x)^3} - \ln(2-x).$$

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen del 14 de Septiembre de 2000

Segunda parte

Ejercicio 4. Se dispone de 20 metros de alambre para delimitar un triángulo equilátero, un cuadrado, o bien ambas figuras. ¿Cuántos metros de alambre deben dedicarse a construirlas, si se pretende que la figura o figuras encierren el área máxima posible?

Solución. Puesto que se trata de un triángulo equilátero y de un cuadrado, sea $T = 3x$ la cantidad de alambre dedicada al triángulo, de lado x, y sea $C = 4y$ la dedicada al cuadrado, de lado y, con lo que $T + C = 3x + 4y = 20$ será nuestra restricción. La altura del triángulo será $\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ y su área, por tanto $A_T = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. El área del cuadrado será $A_C = y^2$. Nuestro problema es, entonces maximizar la función

$$f(x,y) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + y^2,$$

con la restricción $g(x,y) = 3x + 4y - 20 = 0$, donde $0 \leq x$, $0 \leq y$. Observemos que:

Para $x = 0$, $y = 5$, $f(0,5) = 25$.

Para $y = 0$, $x = \frac{20}{3}$, $f(\frac{20}{3}, 0) = \frac{100}{9}\sqrt{3} = 19.245$.

Para el resto de valores posibles, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, los posibles extremos se obtienen resolviendo el adecuado sistema:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_x = \lambda g_x \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 3\lambda \\ 2y = 4\lambda \\ 3x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\sqrt{3} \\ 3y\sqrt{3} + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \frac{20}{4+3\sqrt{3}} = 2.1748 \\ x = \frac{20\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = 3.7669 \end{array}$$

obteniéndose un único punto

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = 3.7669, \; y = \frac{20}{4 + 3\sqrt{3}} = 2.1748$$

correspondiente a $T = 3.7669 \cdot 3 = 11.301$, $C = 2.1748 \cdot 4 = 8.699$, si bien no sabemos si se trata de un maximo o de un mínimo. Por ello calculamos el valor de la función en el punto obtenido y lo comparamos con los hallados para $x = 0$, e $y = 0$. Puesto que

$$f(3.7669, 2.1748) = 3.7669^2\sqrt{3}/4 + 2.1748^2 = 10.874,$$

concluimos que se trata de un mínimo y que el máximo se alcanza en $x = 0$.

Es decir, se debe dedicar todo el alambre a construir un cuadrado de lado 5 metros y área 25 metros cuadrados.

Ejercicio 5. Sea C el arco de la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 4$, orientado positivamente. Usar el teorema de Green para calcular

$$\oint_C \left(x^2 + 2y^3\right) dy.$$

Solución. El teorema de Green asegura que

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy,$$

donde R es el disco $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$. Dado que $Q_x - P_y = 2x$, obtenemos

$$\oint_C \left(x^2 + 2y^3\right) dy = \iint\limits_R 2x\,dx\,dy.$$

Para calcular la integral doble, usaremos el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= 2 + r\cos\theta, \\ y &= r \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(x-2)^2 + y^2 = r^2 \leq 4$, el disco R se transforma en

$$T = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$

El jacobiano del cambio es r, luego la formula del cambio de variables es

$$\begin{aligned} \iint_R 2x dx\,dy &= \iint_T 2\,(2 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ &= 4\iint_T r\,dr\,d\theta + 2\iint_T r^2\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= 4\left(\int_0^2 r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) + 2\left(\int_0^2 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right) \\ &= 4\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \left([\theta]_0^{2\pi}\right) + 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left([\operatorname{sen}\theta]_0^{2\pi}\right) \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Nota. La fórmula del centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ del disco R, con densidad constante $\rho(x,y) = 1$, implica

$$\iint\limits_R x dx\,dy = \overline{x}\iint\limits_R dx\,dy = 2\,\acute{a}rea\,(R) = 8\pi.$$

Entonces, el valor de la integral pedida es 16π.

Ejercicio 6. Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$, situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$, y sea $F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
1. Calcular $\iint_S F \cdot n\, dS$, siendo n la normal interior al paraboloide.
2. Calcular directamente la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S.
3. Comprobar el cálculo anterior usando el teorema de Stokes.

Solución. 1. Usando coordenadas cilíndricas, $z = x^2 + y^2 = r^2$, por lo que la parametrización es $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$, donde $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$. El producto vectorial fundamental es

$$S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2r \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right).$$

En el punto $S(1, 0) = (1, 0, 1)$, tenemos que $S_r \times S_\theta(1, 0) = (-2, 0, 1)$ apunta hacia el interior del paraboloide. Entonces, la normal n tiene la misma dirección que $S_r \times S_\theta$. Calculamos $F \cdot n\, dS = F(S(r, \theta)) \cdot (S_r \times S_\theta)\, dr\, d\theta =$

$$\begin{aligned}
&= \left(r\operatorname{sen}\theta - r^2, r^2 - r\cos\theta, r(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right) \cdot \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right)\, dr\, d\theta \\
&= \left[2r^4\cos\theta - 2r^4\operatorname{sen}\theta + r^2(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\right]\, dr\, d\theta \\
&= \left(2r^4 + r^2\right)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta.
\end{aligned}$$

La integral de flujo a través de S, es

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot n\, dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(2r^4 + r^2\right)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \left(\int_0^1 \left(2r^4 + r^2\right) dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\right) \\
&= \left(\left[\frac{2r^5}{5} + \frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left([\operatorname{sen}\theta + \cos\theta]_0^{\pi/2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right)(1 - 1) = 0.
\end{aligned}$$

2. La frontera de S es la curva cerrada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde C_1 es la intersección de S con el plano $y = 0$, es decir $\theta = 0$. Su parametrización es

$$r_1(t) = S(t, 0) = \left(t, 0, t^2\right), \quad r_1'(t) = (1, 0, 2t), \quad 0 \le t \le 1.$$

La curva C_2 es la intersección de S con el plano $z = 1$, es decir $r = 1$. Su parametrización es

$$r_2(t) = S(1, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \quad r_2'(t) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Observemos que $r_2(0) = (1, 0, 1)$ y $r_2(\pi/2) = (0, 1, 1)$, por lo que su orientación es positiva. La curva C_3 es la intersección de S con el plano $x = 0$, es decir $\theta = \pi/2$. Si elegimos la parametrización

$$r_3(t) = S(t, \pi/2) = \left(0, t, t^2\right), \quad r_3'(t) = (0, 1, 2t), \quad 0 \le t \le 1,$$

entonces la orientación de C_3 es negativa. En consecuencia,

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr_1 + \int_{C_2} F \cdot dr_2 - \int_{C_3} F \cdot dr_3.$$

Vamos a calcular estas tres integrales de línea,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} F \cdot dr_1 &= \int_0^1 F\left(r_1(t)\right) \cdot r_1'(t)\ dt = \int_0^1 \left(-t^2, t^2 - t, t\right) \cdot (1,0,2t)\ dt \\ &= \int_0^1 \left(-t^2 + 2t^2\right)\ dt = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} F \cdot dr_2 &= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta - 1, 1 - \cos\theta, \cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)\ d\theta = [-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \theta]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$-\int_{C_3} F \cdot dr_3 = -\int_0^1 \left(t - t^2, t^2, -t\right) \cdot (0,1,2t)\ dt = \int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}.$$

El valor de la integral de línea sobre la curva frontera es

$$\oint_C F \cdot dr = \frac{1}{3} + 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

3. El rotacional del campo es

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2).$$

El teorema de Stokes afirma que $\oint_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot n\, dS$, donde C es la curva frontera de S orientada positivamente por n. Calculamos la integral de flujo

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot n\, dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (-2,-2,-2) \cdot \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r\right)\ dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[4r^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - 2r\right]\ dr\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\left[\frac{4r^3}{3}\right]_0^1 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - \left[r^2\right]_0^1\right)\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{3}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - 1\right)\ d\theta \\ &= \frac{4}{3}[\operatorname{sen}\theta - \cos\theta]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$