Introducción a la teoría de juegos no cooperativos

Jesús Mario Bilbao

Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

1 Conceptos básicos

La teoría de juegos es una teoría para tomar decisiones racionales, fundada por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Algunos textos introductorios son:

1. Axelrod, R. (1984) *La evolución de la cooperación*, Alianza Editorial, Madrid.

2. Davis, M.D. (1971) *Introducción a la teoría de juegos*, Alianza Editorial, Madrid.

3. Driessen, T. (1988) *Cooperative Games, Solutions and Applications,* Kluwer, Dordrecht.

4. Friedman, J.W. (1991) *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía*, Alianza Editorial, Madrid.

5. Fang, L., Hipel, K.W., Kilgour, D.M. (1993) *The Graph Model for Conflict Resolution,* Wiley, New York.

6. Poundstone, W. (1992) *El dilema del prisionero,* Alianza Editorial, Madrid.

En el siguiente cuadro, se clasifican los métodos para tomar decisiones:

		OBJETIVOS	
		1	≥ 2
ACTORES	1	*Investigación operativa*	*Decisión multicriterio*
	≥ 2	*Juegos cooperativos*	*Juegos no cooperativos*

En el primer tema de este curso, introducimos los juegos no cooperativos, es decir en los que participan dos o más jugadores, que tienen dos o más objetivos. En general, se pueden considerar cuatro clases de juegos:

- Juegos en forma extensiva (árbol)
- Juegos en forma estratégica (normal)
- Juegos en forma gráfica
- Juegos en forma coalicional

Las tres primeras clases de juegos se analizan en la teoría de juegos no cooperativa y la cuarta corresponde a los juegos cooperativos.

1.1 Juegos en forma de árbol

En la figura 1, tenemos dos jugadores 1 y 2, que participan en el siguiente juego. En primer lugar, el jugador 1 decide ir a la izquierda (I) o a la derecha (D). Entonces, el jugador 2 decide ir a la derecha o a la izquierda. Los pagos que corresponden al primer (segundo) jugador son la primera (segunda) componente del vector que tiene asignada cada situación.

Analicemos como deben jugar 1 y 2. El jugador 2, teniendo en cuenta los pagos que recibirá al terminar el juego, debe elegir la siguiente estrategia: si el jugador 1 elige I, ir a la derecha eligiendo d_1, y si 1 elige D, elegir i_2. Esta estrategia se denotará $d_1 i_2$. El jugador 1 conoce el árbol y los pagos, luego puede anticipar la conducta del jugador 2 y debe elegir D.

El par de estrategias $(D, d_1 i_2)$ da lugar a un escenario en el que el jugador 1 recibe 4 y el jugador 2 recibe 8.

¿Puede alguno de los jugadores mejorar sus pagos?

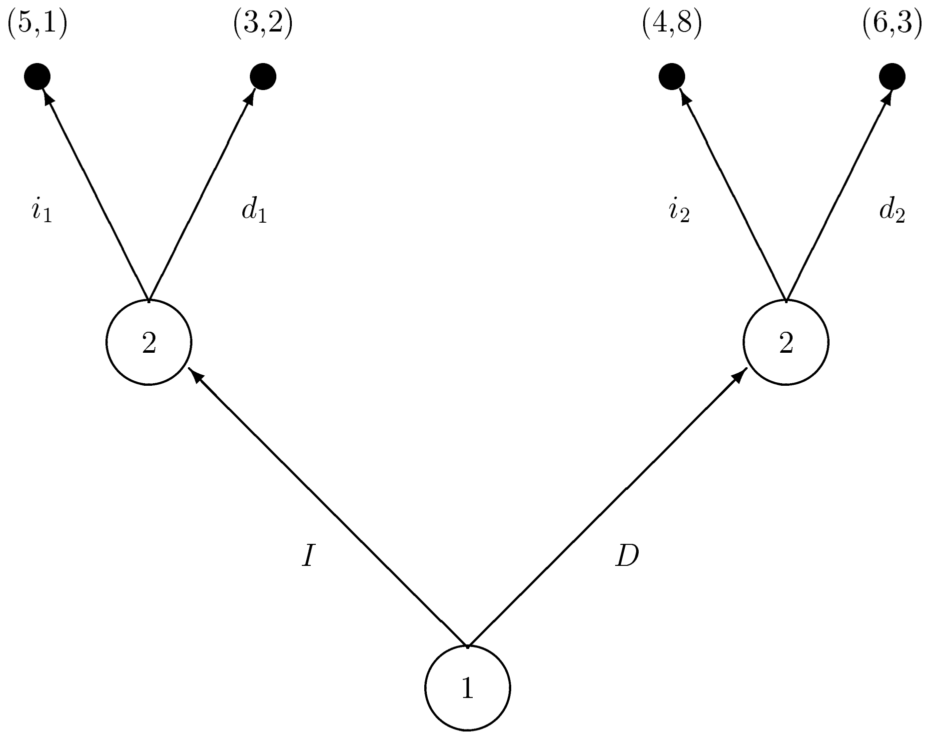


Figura 1: Un juego en forma extensiva

1.2 Juegos en forma estratégica

En el ejemplo que estamos analizando, el jugador 1 tiene dos estrategias I y D, mientras que el jugador 2 tiene cuatro estrategias dadas por

$$i_1 i_2,\ i_1 d_2,\ d_1 i_2,\ d_1 d_2.$$

Podemos representar los pagos en la siguiente matriz, cuyas entradas son los vectores de pagos,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} i_1 i_2 & i_1 d_2 & d_1 i_2 & d_1 d_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ D \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} (5,1) & (5,1) & (3,2) & (3,2) \\ (4,8) & (6,3) & (4,8)^* & (6,3) \end{array} \right] \end{array}$$

Notemos que las matrices de pagos para los jugadores 1 y 2 son, respectivamente,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

El par de estrategias $(D, d_1 i_2)$ es un equilibrio de Nash porque ninguna desviación unilateral de los jugadores les permite mejorar sus pagos, dados por $(4, 8)$.

Definición 1 *Sea* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un conjunto de jugadores. Un juego estratégico de* n *personas se representa por* $\Gamma = \left((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N} \right)$, *donde* X_i *es el espacio de las estrategias del jugador* i, *y* $K_i : \prod_{i \in N} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$ *es la función de pagos del jugador* i.

Cada combinación estratégica $x \in \prod_{i \in N} X_i$ se denomina un escenario o resultado del juego. Dados un escenario $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y una estrategia $y \in X_i$ del jugador i, denotamos mediante (x_{-i}, y) el escenario que obtenemos de x, reemplazando su i-ésima componente x_i por y. Usando esta notación, vamos a definir el concepto más importante de la teoría de juegos no cooperativos.

Definición 2 *Un escenario* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *es un equilibrio de Nash del juego* $\Gamma = \left((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N} \right)$ *si para todo jugador* $i \in N$, *y para toda estrategia* $x_i \in X_i$, *se verifica* $K_i\left(x_{-i}^*, x_i\right) \leq K_i\left(x_i^*\right)$.

Un ejemplo político

En un año electoral, dos partidos políticos A, B deben pronunciarse sobre una disputa entre dos comunidades X, Y relativa a ciertos derechos de aguas, y cada partido debe decidir si favorece a una de las dos o soslaya la cuestión.

En la siguiente tabla se representan por filas las estrategias del programa de A, y por columnas las estrategias del programa de B. Los pagos al partido A, en porcentaje de votos, se dan en las entradas de la tabla, y la suma de porcentajes de A y B es 100.

	Favorecer X	Favorecer Y	Soslayar
Favorecer X	35	10	60
Favorecer Y	45^*	55	50
Soslayar	40	10	65

El método para encontrar los equilibrios de Nash es el siguiente. Supongamos que B conoce la decisión de A. Entonces, B elige la columna donde se hace *mínimo* el pago de A, con lo que A elegirá la fila que la proporcione el *máximo* de dichos mínimos. Este valor, denominado *maximin* es la cantidad que con seguridad puede obtener A y en este juego es

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max\{10, 45, 10\} = 45.$$

Si cambiamos los papeles de A y B, siendo A el que conoce la estrategia de B, tenemos que A elige la fila que maximiza su pago, con lo que B se decidirá por la columna que minimice dichos máximos. El valor minimax de este juego es

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min\{45, 55, 65\} = 45.$$

En este juego, hemos obtenido un par de estrategias (Y, X) con pago $a_{21} = 45$, que constituye el único equilibrio de Nash de este juego.

1.3 Juegos en forma gráfica

Fang, Hipel y Kilgour proponen el siguiente *modelo gráfico* para un juego no cooperativo. Éste consiste en un conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadores, un conjunto $U = \{1, 2, \ldots, u\}$ de escenarios, una familia de grafos dirigidos $D_i = (U, A_i)$ para cada jugador $i \in N$, y una familia de funciones de pago $K_i : U \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; i \in N$.

El modelo se completa definiendo el conjunto de movimientos que un jugador puede realizar para cambiar (unilateralmente) de escenario y así obtener los grafos dirigidos D_i. Dado que en el juego el objetivo es aumentar los pagos que recibe el jugador, tenemos las siguientes definiciones:

Dado un escenario g y un jugador i, el conjunto de los escenarios que el jugador puede alcanzar unilateralmente desde g se denota por $S_i(g)$. Si además, i recibe un pago estrictamente mayor, los escenarios de mejora unilateral para i son:

$$S_i^+(g) = \{q \in S_i(g) : K_i(q) > K_i(g)\}.$$

Introducimos los siguientes conceptos de estabilidad y equilibrio.

Definición 3 *Un escenario $g \in U$ es estable Nash para el jugador i si $S_i^+(g) = \emptyset$. Un escenario $g \in U$ es secuencialmente estable para el jugador i si para cualquier $g_1 \in S_i^+(g)$ existe al menos un escenario $g_x \in S_{N \setminus i}^+(g_1)$ con $K_i(g_x) \leq K_i(g)$.*

Definición 4 *Un equilibrio de Nash es un escenario que es estable Nash para todos los jugadores. Un equilibrio secuencial es un escenario que es secuencialmente estable para todos los jugadores.*

2 Juegos bipersonales de suma cero

Un juego en forma estratégica $\Gamma = \left((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N}\right)$ es un juego *de suma cero* si $\sum_{i \in N} K_i = 0$.

Un juego de dos personas se denota con (X, Y, K, L), donde las estrategias son $X = \{1, 2, \ldots m\}$ y $Y = \{1, 2, \ldots n\}$. Entonces este *juego bipersonal* se puede representar mediante una matriz $m \times n$ cuyas entradas son vectores de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} (K(1,1), L(1,1)) & \cdots & (K(1,n), L(1,n)) \\ \vdots & & \vdots \\ (K(i,1), L(i,1)) & \cdots & (K(i,n), L(i,n)) \\ \vdots & & \vdots \\ (K(m,1), L(m,1)) & \cdots & (K(m,n), L(m,n)) \end{bmatrix}$$

Las filas (columnas) corresponden a las m (n) estrategias del jugador 1 (2). En el caso de que el juego bipersonal sea de suma nula, tenemos que $L = -K$, y se representa con la matriz $(K(i,j))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Veamos un ejemplo de juego bipersonal de suma nula para introducir los principales conceptos.

El jugador I elige una carta de un mazo de tres cartas numeradas 1,2,3. El jugador II intenta adivinar la carta que ha elegido II. Después de cada conjetura el jugador i informa al II diciéndole *alto*, *bajo* o *correcto*, dependiendo de la conjetura de I.

El juego termina cuando el jugador II acierta la carta y paga al jugador I una cantidad igual al número de tentativas que ha hecho. En el siguiente juego, I y II intercambian sus papeles.

Las estrategias del jugador I son $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, donde α es elegir la carta 1, β la carta 2 y γ la carta 3. Las estrategias del jugador II (excluyendo algunas tontas) son $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dadas por:

a : Decir 1, si el oponente dice bajo, decir 2 en la siguiente ronda. Si de nuevo dice bajo, decir 3.

b : Decir 1, si el oponente dice bajo, decir 3 en la siguiente ronda. Si dice alto, decir 2.

c : Decir 2, si el oponente dice bajo, decir 3; si dice alto, decir 1.

d : Decir 3, si el oponente dice alto, decir 1 en la siguiente ronda. Si después dice bajo, decir 2.

e : Decir 3, si el oponente dice alto, decir 2 en la siguiente ronda. Si de nuevo dice alto, decir 1.

La matriz de pagos de este juego es

$$\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definición 5 *Un par de estrategias* (i^*, j^*) *para una matriz de pagos* $K = (K(i,j))$ *es un punto de silla si* $K(i, j^*) \leq K(i^*, j^*) \leq K(i^*, j)$, $\forall i, \forall j$.

Si existe, un punto de silla $K(i^*, j^*)$ es el pago seguro que tiene el jugador I contra la elección racional del jugador II (que busca minimizar el pago a I). En general, una matriz no tiene puntos de silla y si existe alguno, no necesariamente es único. Si $K(i^*, j^*)$ es un punto de silla, entonces se verifica

$$K(i^*, j^*) = \max_i \min_j K(i,j) = \min_j \max_i K(i,j).$$

El juego de adivinar la carta numerada no tiene punto de silla porque

$$\begin{aligned} \max_i \min_j K(i,j) &= 1, \\ \min_j \max_i K(i,j) &= 2. \end{aligned}$$

Cuando un juego no tenga puntos de silla, es posible elegir estrategias mixtas, obteniendo un nuevo juego, denominado *extensión mixta*. Para un juego $m \times n$ matricial $A = (a_{ij})$, el conjunto de estrategias mixtas para el jugador I es

$$\Delta^m := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \; : \; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Cada estrategia mixta $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \Delta^m$ consiste en jugar la estrategia de la fila i con probabilidad x_i. De manera análoga, las estrategias mixtas para el jugador II son

$$\Delta^n := \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \; : \; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

Definición 6 *Sea A un juego matricial $n \times m$. Entonces, la extensión mixta de A es el juego infinito $(\Delta^m, \Delta^n, K, L)$, definido mediante*

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y, \\ L(x,y) &= -K(x,y). \end{aligned}$$

Teorema 1 (von Neumann) *Sea A un juego matricial $n \times m$. Entonces, existen un par de estrategias mixtas $(x^*, y*) \in \Delta^m \times \Delta^n$ tales que*

$$K(x^*, y^*) = \max_{x \in \Delta^m} \min_{y \in \Delta^n} K(x,y) = \min_{y \in \Delta^n} \max_{x \in \Delta^m} K(x,y).$$

La existencia de estrategias mixtas óptimas no nos da un método para calcularlas. El teorema minimax también puede probarse usando programación lineal, lo que permite obtener un algoritmo eficiente mediante el *método del simplex.*

3 Juegos bipersonales de suma no nula

El teorema de von Neumann se generaliza a los juegos bipersonales de suma no nula, que denominamos *juegos bimatriciales*, considerando la extensión mixta de un juego bimatricial (A, B), que denotamos $(\Delta^m, \Delta^n, K, L)$, dada por $K(x,y) := x^T A y$, $L(x,y) := x^T B y$, donde $x \in \Delta^m$, $y \in \Delta^n$. El resultado fundamental que garantiza la existencia de equilibrios de Nash es:

Teorema 2 (Nash) *La extensión mixta de un juego bimatricial tiene al menos un equilibrio de Nash.*

En lo que sigue, denotaremos el conjunto no vacío de los equilibrios de Nash de la extensión mixta del juego bimatricial (A, B) mediante $NE\,(A, B)$.

Los *juegos potenciales* han sido introducidos por Monderer y Shapley en 1993. Sea $\Gamma = \left((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N}\right)$ un juego de n personas y sea $P : \prod_{i \in N} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$, una función real definida en el conjunto de los escenarios del juego. Entonces, P es un *potencial* del juego Γ si para cada jugador $i \in N$, cada $x_{-i} \in \prod_{k \neq i} X_k$ y cualquier par $x_i, x_i' \in X_i$ se verifica

$$K_i\left(x_{-i}, x_i'\right) - K_i\left(x_{-i}, x_i\right) = P\left(x_{-i}, x_i'\right) - P\left(x_{-i}, x_i\right).$$

Definición 7 *Un juego para el que exista un potencial* $P : \prod_{i \in N} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$*, se denomina un juego potencial.*

El juego del ciclo

Consideremos dos jugadores que viajan por las aristas del ciclo de la figura 2. El jugador 1 viaja desde A hasta C, a través de B o de D. El jugador 2 viaja desde B hasta D, a través de A o de C.

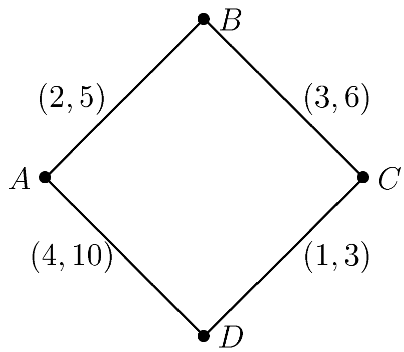


Figura 2: Un juego potencial

El coste de usar la arista AB es 2 si la usa un solo jugador y 5 si la usan los dos. El resto de los costos se representan con los vectores dados en la figura 2. Esta situación es el juego de coste bimatricial dado por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} BAD & BCD \end{array} \\ \begin{array}{c} ABC \\ ADC \end{array} & \begin{bmatrix} (8,9) & (8,7) \\ (11,12) & (7,6)^{*} \end{bmatrix} \end{array}$$

en el que hay un equilibrio de Nash con estrategias puras, cuyo coste mínimo es $(7,6)$. Las matrices de costes para los jugadores 1 y 2 son, respectivamente,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

Comprobar, aplicando la definición que un potencial del juego viene dado por

$$P = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 17 & 11 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3 *Sea* $\Gamma = \left((X_i)_{i \in N}, (K_i)_{i \in N} \right)$ *un juego de* n *personas con potencial* P*. Entonces,*

1. $NE\,(X_1, \ldots, X_n, K_1, \ldots, K_n) = NE\,(X_1, \ldots, X_n, P, \ldots, P)$.

2. *El juego* Γ *tiene al menos un equilibrio de Nash puro.*

3.1 El dilema del prisionero

En este juego participan dos sospechosos de asesinato, que son interrogados por separado por el fiscal. Los prisioneros han llegado al acuerdo de no hablar.

Si ambos *cooperan* y no hablan, entonces reciben una condena menor por robo con armas con la recompensa (R, R).

Si ambos incumplen su acuerdo y confiesan, entonces reciben un castigo mayor, luego sus pagos (P, P) verifican $R > P$.

Sin embargo, si uno de los jugadores no coopera confesando y el otro coopera callando, el que no coopera recibe un pago $T > R$ y el que coopera es condenado por asesinato, recibiendo el menor pago $S < P$. Observemos que T es un incentivo para traicionar la cooperación (pago a los arrepentidos).

El juego del dilema del prisionero en forma estratégica se modela con la siguiente bimatriz,

	c_2 coopera	d_2 defrauda
c_1 coopera	(R, R)	(S, T)
d_1 defrauda	(T, S)	$(P, P)^*$

donde los pagos verifican $T > R > P > S$.

Existen cuatro escenarios y el único equilibrio de Nash es el par de estrategias de no cooperación (d_1, d_2), aunque los pagos a la cooperación (c_1, c_2) sean mayores. Este escenario (c_1, c_2) es inestable porque el pago por traicionar $T > R$, hace que el jugador 1 se mueva a la segunda fila o que el jugador 2 se mueva a la segunda columna. Además, (d_1, c_2) y (c_1, d_2) también son inestables porque $S < P$. Alcanzado el escenario de no cooperación, ambos jugadores pierden si cooperan.

Este resultado dificulta la cooperación en este tipo de juegos. La conclusión es más optimista si probamos que *el escenario de cooperación es secuencialmente estable.*

Si $g = (c_1, c_2)$, entonces el único escenario que puede alcanzar unilateralmente el jugador 1 es $g_1 = (d_1, c_2)$, pero el jugador 2 puede responder con el movimiento a la segunda columna, alcanzándose el escenario $g_x = (d_1, d_2)$. En el escenario g_x tenemos que el pago al primer jugador $P < R$, luego g es secuencialmente estable.

El juego del gallina consiste en conducir dos coches, uno frente a otro. Si ambos se desvían, los dos jugadores son gallinas pero se mantienen vivos, si ninguno se desvía, sufren un accidente y los pagos son los menores. Si uno de los dos no se desvía, el que lo hace es el gallina. Otra variante del juego, que protagonizó James Dean en *Rebelde sin causa*, es quedar a la menor distancia del borde de un acantilado. Este juego se modela con la bimatriz dada por

	d_2 desvía	nd_2 no desvía
d_1 desvía	(R, R)	(S, T)
nd_1 no desvía	(T, S)	(P, P)

donde $T > R > S > P$.

Observemos que en el dilema del prisionero tenemos $P > S$. Esta diferencia tiene importantes consecuencias para los equilibrios del juego. Así, el juego del gallina tiene dos equilibrios de Nash en los escenarios (d_1, nd_2) y (nd_1, d_2). Sin embargo, el escenario de menor riesgo (d_1, d_2) no es estable Nash y tampoco es secuencialmente estable.

4 El dilema del prisionero repetido

Supongamos que el juego del dilema del prisionero se repite indefinidamente. Una *estrategia* en este *superjuego* es un programa que le dice al jugador en cada etapa cuando debe jugar cooperativamente C o defraudar D. El programa puede ser dependiente de las etapas previas, independiente y también, estocástico.

Si A_n^i es el pago de un jugador i en la etapa n, entonces el pago medio esperado en el superjuego es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_1^i + \cdots + A_n^i}{n},$$

suponiendo que el límite existe. Veamos algunas estrategias autónomas y otras que usan la jugada anterior.

1. Cooperar siempre, que denotamos **C**.

2. Defraudar siempre, que denotamos **D**.

3. Toma y daca, que comienza cooperando y después repite siempre la jugada del adversario. Se denota TD.

4. La estrategia de Pavlov es cooperar si recibe la recompensa R por cooperación mutua. Análogamente, defrauda porque le ha salido bien, al recibir T. Si defrauda y recibe P, opta por cooperar y si es engañado con el peor pago S, cambia su conducta para defrudar. Esta estrategia de *palo y zanahoria* se denota por PZ.

Las estrategias mencionadas se presentan en la siguiente tabla:

Mi E_n	Su E_n	Mi pago	**C**	**D**	TD	PZ
C	C	R	C	D	C	C
C	D	S	C	D	D	D
D	C	T	C	D	C	D
D	D	P	C	D	D	C

5 La evolución de la cooperación (Nice Guys Sometimes Finish First)

¿Porqué los individuos, humanos y animales, se ayudan mutuamente? La pregunta, usando términos de la biología evolutiva, es: ¿la selección natural favorece la conducta altruista?

En una interacción aislada entre dos individuos, cada uno de ellos debe elegir entre dos estrategias de interacción: cooperar (C) o defraudar (D). El dilema del prisionero es un modelo de interacción en la que los cuatro escenarios posibles tienen pagos tales que $T > R > P > S$.

	C_2	D_2
C_1	(R, R)	(S, T)
D_1	(T, S)	$(P, P)^*$

Sabemos que la conducta racional de cada jugador en una única interacción es elegir D. Sin embargo, una conducta cooperativa puede darse cuando se producen muchos encuentros y los jugadores eligen sus estrategias usando los resultados obtenidos en los encuentros previos. En efecto, la cooperación es más fácil en grupos estables y cerrados, mientras que los defraudadores pueden medrar entre una multitud anónima.

Recientemente, Nowak y May (veáse *Investigación y Ciencia* 227 (1995) 42–48) han probado que en los modelos en los que cada jugador interactúa sólo con sus vecinos en un retículo bidimensional la conducta cooperativa es evolutivamente estable. Estos *juegos territoriales* se modelan con autómatas celulares. A continuación, desarrollamos un programa del dilema del prisionero territorial, usando el sistema de computación *Mathematica*.

El dilema del prisionero territorial

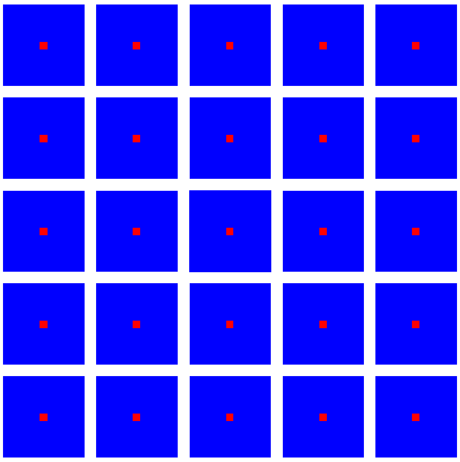
Gaylord, Nishidate,Mathematica in Education and Research 4 (1995)

Los puntos del retículo cuadrado tienen valores C o D, que representan estrategias de cooperar o defraudar. Despues de jugar con los 8 puntos que le rodean y con él mismo, el punto adopta la conducta con mayor pago en cada torneo. La distribución inicial es un defraudador en el centro, rodeado de cooperadores.

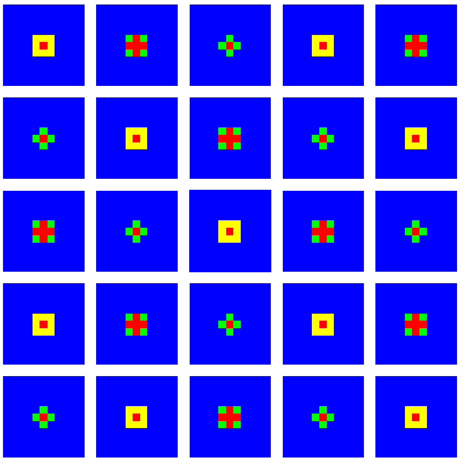
```
SpatialPrisonersDilemma[n_,p_,t_]:=Module[
{initConf,MooreValues,totalPayoffPlayer,outcome,
StrategyDecision,totalPayoffLat,sitePayoffPairsLat,
BestNbrhdPayoffStrategy,newStrategyLat,evolution},
initConf=
ReplacePart[Table[C,{2 n+1},{2 n+1}],D,{n+1,n+1}];
MooreValues[function_,lat_]:=
MapThread[function,{#,RotateRight[#,{0,1}],
RotateRight[#,{1,0}],RotateRight[#,{0,-1}],
RotateRight[#,{-1,0}],RotateRight[#,{1,1}],
RotateRight[#,{1,-1}],RotateRight[#,{-1,-1}],
RotateRight[#,{-1,1}]}, 2]&[lat];
totalPayoffPlayer[x_,a_,b_,c_,d_,e_,f_,g_,h_]:=
outcome[x,x]+outcome[x,a]+outcome[x,b]+outcome[x,c]+
outcome[x,d]+outcome[x,e]+outcome[x,f]+outcome[x,g]+
outcome[x,h];
outcome[C,C]=1;outcome[C,D]=0;
outcome[D,D]=0;outcome[D,C]=p;
StrategyDecision:=
(totalPayoffLat=MooreValues[totalPayoffPlayer,#];
 sitePayoffPairsLat=MapThread[List,{totalPayoffLat,#},2];
 BestNbrhdPayoffStrategy[x__]:=Last[Sort[{x}]][[2]];
newStrategyLat=
MooreValues[BestNbrhdPayoffStrategy,sitePayoffPairsLat])&;
evolution=NestList[StrategyDecision,initConf,t]]
```

```
SocialEvolution[lis_]:=Module[{picture},
picture=Rest[MapThread[color,{#,RotateRight[#]}&[lis],3]];
Map[Show[Graphics[RasterArray[Reverse[#]/.
{color[C,C] -> RGBColor[0,0,1],
color[D,D] -> RGBColor[1,0,0],
color[C,D] -> RGBColor[0,1,0],
color[D,C] -> RGBColor[1,1,0]}]],
AspectRatio ->Automatic, DisplayFunction->Identity]&,
picture]]
```

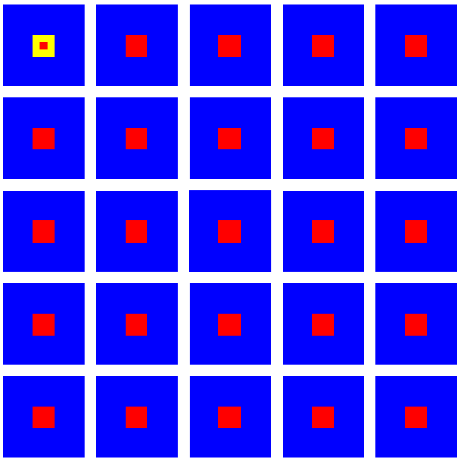
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1,25]],5]]];
```



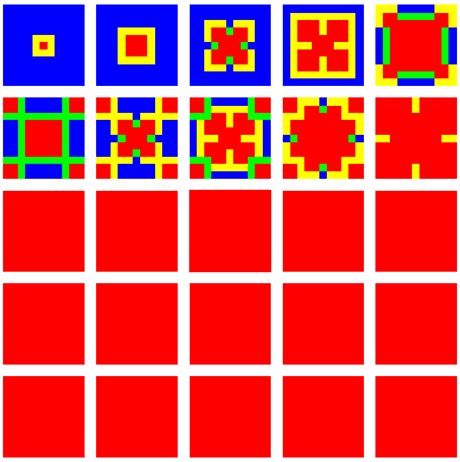
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1.5,25]],5]]];
```



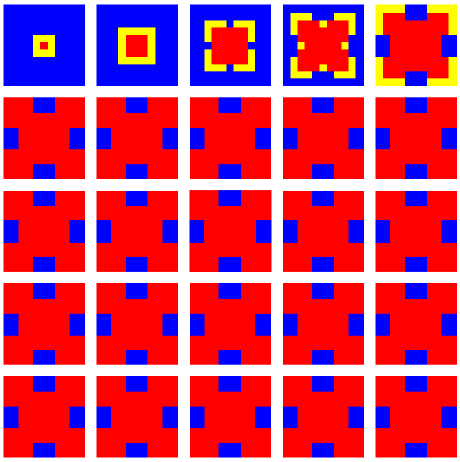
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1.6,25]],5]]];
```



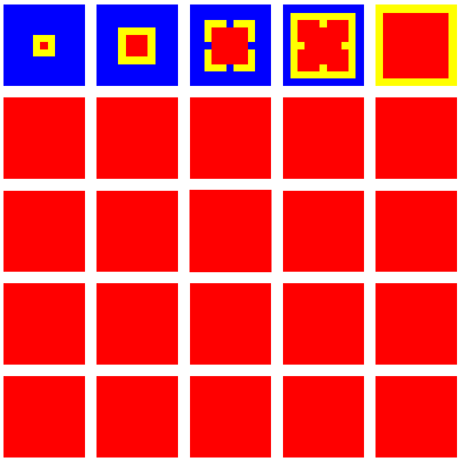
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,1.8,25]],5]]];
```



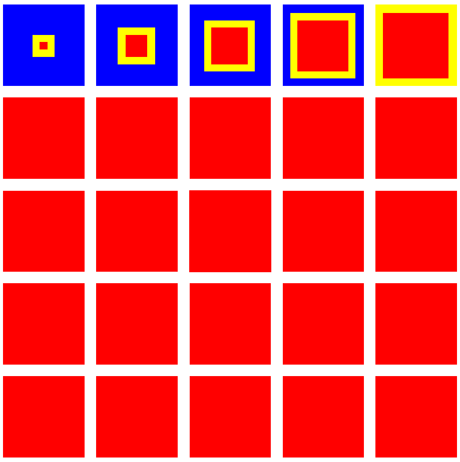
```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,2,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,2.3,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[5,3,25]],5]]];
```



```
Show[GraphicsArray[Partition[SocialEvolution[
SpatialPrisonersDilemma[25,1.85,30]],5]]];
```