$\boxed{\text{Métodos combinatorios en teoría de juegos}}$

$\boxed{\text{Juegos simples}}$

El conjunto 2^N de todas las coaliciones es un espacio topológico finito con la topología dada por la clausura

$$\overline{\{S\}} := \left\{T \in 2^N : T \subseteq S\right\}.$$

El conjunto $\{0,1\}$ con la relación $0 < 1$ es el espacio topológico de Sierpinski , cuyos cerrados son $\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Algunas propiedades de los juegos simples son :

1. El juego simple $v : 2^N \to \{0,1\}$ es monótono si y sólo si v es continua.

2. La familia de las coaliciones ganadoras en un juego simple monótono

$$\mathcal{W} := \{S \subseteq N : \ v(S) = 1\} = v^{(-1)}(\{1\}),$$

es un abierto del espacio 2^N.

3. La familia de las coaliciones ganadoras minimales respecto a la inclusión

$$\mathcal{MW} := \{S \in \mathcal{W} : T \subset S \Rightarrow T \notin \mathcal{W}\},$$

es la familia de las coaliciones ganadoras relativamente cerradas en $\mathcal{W}$. Es decir

$$\mathcal{MW} = \left\{S \in \mathcal{W} : \overline{\{S\}}^{\mathcal{W}} = \{S\}\right\}.$$

La propuesta de investigación consiste en dotar al conjunto de los jugadores N de una relación de orden parcial, lo que equivale a que N sea un espacio topológico finito. Además de utilizar la conexión topológica, es posible definir estructuras de cooperación mediante grafos simples o dirigidos.

Juegos de votación

La familia $\mathcal{W}$ de las coaliciones ganadoras de un juego simple propio sobre los votantes N, satisface

1) Si $C \in \mathcal{W}$ y $C \subseteq C'$, entonces $C' \in \mathcal{W}$.

2) Si $C \in \mathcal{W}$, entonces $N \setminus C \notin \mathcal{W}$.

La relación entre las alternativas $x \in X$, es

$$x \prec y \Longleftrightarrow \exists C \in \mathcal{W} \text{ tal que } x <_i y, \forall i \in C.$$

Las alternativas *ideales*, son los elementos sin *sucesor*

$$\left\{x \in X : \Gamma^{+}(x) = \emptyset\right\}, \quad \Gamma^{+}(x) := \{y \in X : x \prec y\}.$$

Una línea de investigación consiste en encontrar una orientación O_n que maximice la suma de los pesos de los arcos de O_n. Entonces, el problema de encontrar los puntos ideales $\Gamma^{+}(x) = \emptyset$ es el problema del *núcleo local* o *seminúcleo* caracterizado por Galeana-Sánchez y Neumann-Lara y por Duchet y Meynel.

Los valores de Shapley y Myerson

El valor de Shapley de v, para un jugador $i \in N$, es

$$\Phi_i\,(v) := \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}\,[v(S) - v(S \setminus \{i\})]\,.$$

Myerson define un grafo de cooperación $G = (N, E)$, cuyo conjunto de vértices N es el formado por todos los jugadores y cuyo conjunto de aristas no ordenadas E viene dado por los acuerdos bilaterales entre los jugadores. El juego restringido por el grafo es

$$v^G(S) := \sum v\left(S_j^G\right),$$

donde la suma recorre todas las componentes conexas S_j^G del subgrafo inducido por $S \subseteq N$.

El valor de Myerson del juego (N, v) con el grafo de cooperación G es

$$\Phi_i^G\,(v) = \Phi_i\left(v^G\right),$$

donde Φ_i denota el valor de Shapley ordinario para un jugador i.

Geometrías convexas

Sea $\mathcal{L}$ una familia de subconjuntos de un conjunto finito N, que denominamos convexos, cerrada para la intersección y que contiene a N y $\emptyset$. La *envoltura convexa* de $S \subseteq N$ es la intersección de todos los convexos que contienen a S, y se denota por $\mathcal{L}(S)$. Un punto i de un conjunto convexo $S \in \mathcal{L}$ es un *punto extremal* de S si $S \setminus \{i\} \in \mathcal{L}$. El conjunto de los puntos extremales de S se denota por $ex(S)$.

Una *geometría convexa* es un par $(N, \mathcal{L})$ tal que $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos de N, cerrada para la intersección, que contiene a N y $\emptyset$, y tal que cualquier convexo $S \in \mathcal{L}$ verifica $S = \mathcal{L}(ex(S))$. La geometría convexa es de *partición* si es cerrada para la unión de convexos con intersección no vacía y contiene a los átomos.

El *juego restringido por la geometría* $v^{\mathcal{L}}$, es

$$v^{\mathcal{L}}(S) = \sum \left\{ v(T) : T \text{ convexo maximal de } S \right\}.$$

$\boxed{\text{Valores y potencial de juegos restringidos}}$

El valor de Shapley del juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ es

$$(\mathcal{L}\Phi)_i(v) = \Phi_i\left(v^{\mathcal{L}}\right), \quad \forall i \in N.$$

El potencial del juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ es

$$\mathcal{L}P(N,v) = P\left(N, v^{\mathcal{L}}\right),$$

donde P es el potencial de Hart y Mas-Colell.

En el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$, el intervalo $[S^-, S]$ es un álgebra de Boole para $S \in \mathcal{L}$, siendo $S^- = S \setminus ex(S)$. Entonces, el intervalo $[S^-, S]$ es isomorfo a $2^{ex(S)}$.

En una geometría convexa de partición, el intervalo $[T, T^+]$ es un álgebra de Boole, para $T \in \mathcal{L}$, $T \neq \emptyset$, siendo

$$\begin{aligned} T^+ &= \bigvee \{C \in \mathcal{L} \ : \ C \succ T\} \\ &= \{i \in N : T \cup \{i\} \in \mathcal{L}\ \} \end{aligned}$$

En una geometría convexa de partición, tenemos:

(a) El valor de Shapley del juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ es

$$\begin{aligned}\Phi_i\left(v^{\mathcal{L}}\right) &= \sum_{T\in\mathcal{L}_i^+}\frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!}[v(T)-v(T\setminus i)] \\ &\quad+\sum_{T\in\mathcal{L}_i\setminus\mathcal{L}_i^+}\frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!}v(T) \\ &\quad-\sum_{T\in\mathcal{L}_i^\star}\frac{(t)!(t^+-t-1)!}{t^+!}v(T).\end{aligned}$$

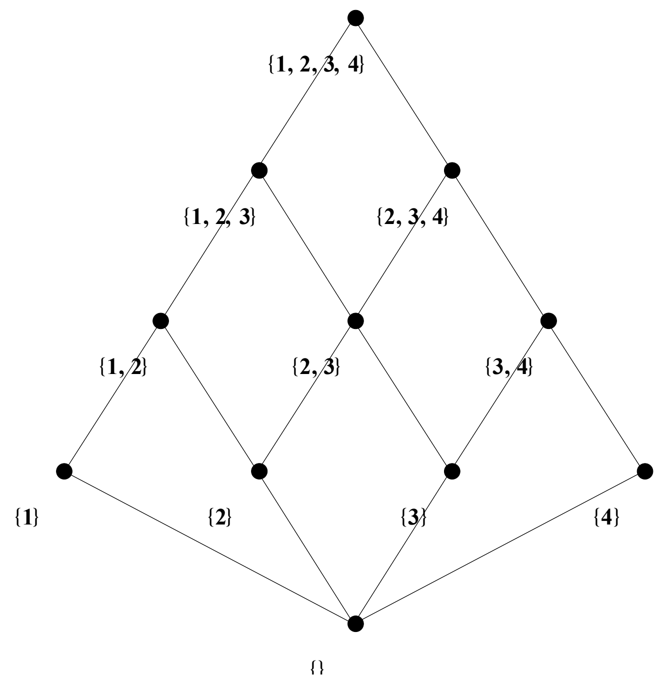
(b) Si el jugador $i\in ex(N)$ entonces

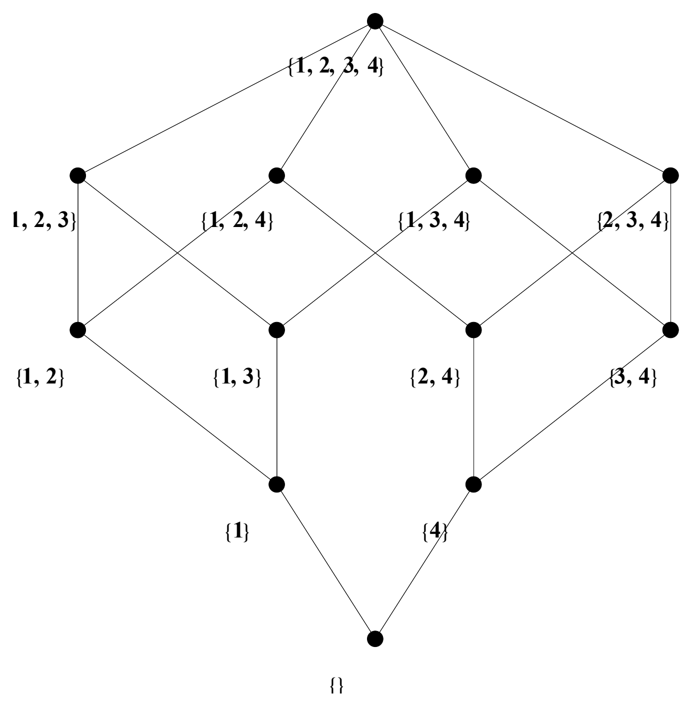
$$\Phi_i\left(v^{\mathcal{L}}\right)=\sum_{T\in\mathcal{L}_i}\frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!}[v(T)-v(T\setminus i)].$$

(c) El potencial del juego restringido $v^{\mathcal{L}}$ satisface

$$P\left(N,v^{\mathcal{L}}\right)=\sum_{T\in\mathcal{L}}\frac{(t-1)!(t^+-t)!}{t^+!}v(T),$$

donde $t=|T|$, *y* $t^+=|T^+|$.


{1, 2, 3, 4}
{1, 2, 3}
{2, 3, 4}
{1, 2}
{2, 3}
{3, 4}
{1}
{2}
{3}
{4}
{}


{1, 2, 3, 4}
1, 2, 3}
{1, 2, 4}
{1, 3, 4}
{2, 3, 4}
{1, 2}
{1, 3}
{2, 4}
{3, 4}
{1}
{4}
{}

Juegos en estructuras combinatorias

En un juego cooperativo se postula que todas las coaliciones son posibles. Si la cooperación es parcial, definimos el siguiente concepto. *Un juego en un sistema de subconjuntos* $\mathcal{F} \subset 2^N$ es una aplicación

$$v : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

La familia de coaliciones $\mathcal{F}$ está parcialmente ordenada por $\subseteq$, y será un retículo, un $\cup$-semirretículo o un $\cap$-semirretículo si $\mathcal{F}$ es cerrado para uniones e intersecciones, o sólo para una de estas operaciones. Los trabajos seminales en retículos distributivos se deben a Faigle y Kern . Si $\mathcal{F}$ es una *geometría convexa*, el valor de Shapley se axiomatiza en Bilbao y Edelman.

Si $G = (N, E)$ es un grafo de cooperación para los jugadores de un juego v, existen diferentes familias $\mathcal{F}$ que determinan juegos con cooperación restringida. Otras familias combinatorias a considerar son los *matroides*, *antimatroides* y *aumenting systems*.

Complejidad en juegos cooperativos

En los procedimientos clásicos para calcular índices de poder en juegos de votación, la función que mide el tiempo de ejecución del programa en el peor de los casos pertenece a $O(n2^n)$ o bien a $O\left(n^2 2^n\right)$. En esta sección, vamos a proponer algoritmos basados en *funciones generatrices*, es decir series de potencias formales $\sum_{k\geq 0} f(k)x^k$.

Estos métodos son clásicos, pero no se habían utilizado en el cálculo práctico de índices de poder porque requieren la utilización de cálculos simbólicos. El primer trabajo que presenta algoritmos de este tipo implementados en Mathematica aparece en 1997 y es debido a Tannenbaum.

Un ejemplo práctico de utilización de esta aproximación es calcular los índices de poder de las naciones que forman parte del Consejo de Ministros de la Unión Europea. Este juego de votación ponderada viene definido por

$$[q;\ 10, 10, 10, 10, 8, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2]\,,$$

donde $q = 62$ or $q = 65$. En general, no podemos garantizar una complejidad temporal polinómica para los algoritmos basados en funciones generatrices. Sin embargo, como la complejidad de dichos algoritmos depende del número de coeficientes no nulos del polinomio, la complejidad es polinómica en muchos juegos de votación.

La siguiente tabla muestra el tiempo en segundos para procesar con *Mathematica* el algoritmo *BanzhafIndice*, que usa la fórmula combinatoria directa con los algoritmos *BFG* y *ShFG* construidos con funciones generatrices.

	Banzhaf	*BFG*	Shapley	*ShFG*
$q = 62$	6285.24	0.824	442.15	4.284
$q = 65$	6050.04	0.824	464.07	4.284