EL PODER DE LAS NACIONES Y SUS CIUDADANOS EN LA UNIÓN EUROPEA

Jesús Mario Bilbao Arrese*

1. Introducción

El poder de una nación en el seno de una organización supranacional como el Consejo de la Unión Europea o el Fondo Monetario Internacional es una medida numérica de su capacidad para decidir la aprobación de una moción. Este carácter decisivo se mide calculando el número de veces que el voto de una nación convierte a una coalición que no alcanzaba la cuota para adoptar decisiones en una coalición ganadora. Los índices de poder son medidas *a priori* de dicho poder, siendo los más utilizados los índices de Shapley-Shubik (1954) y de Banzhaf (1965). Ambos índices proporcionan una medida mucho más precisa del poder de un jugador que el número de votos que tiene derecho a emitir. Otra cuestión que se plantea en la toma de decisiones es la siguiente: ¿Cómo se mide el poder de una nación para bloquear una decisión? La respuesta a esta cuestión es que el poder de una nación para bloquear decisiones es el mismo que tiene para aprobarlas. Más precisamente, tanto el índice de Banzhaf como el de Shapley-Shubik coinciden en las situaciones de bloqueo y de aprobación. Por ello, ambos índices miden tanto la capacidad de una nación para aprobar una propuesta como para bloquearla (véase Dubey y Shapley, 1979).

En la sección segunda, introducimos los fundamentos de la teoría de la conducta racional y, en este marco, acotaremos los problemas y conflictos que forman parte de la teoría de juegos. En la tercera sección, definimos los juegos de votación ponderada y los índices de poder citados. La sección cuarta se dedica al cálculo efectivo de estos índices. Para ello, usaremos las *funciones generatrices* que nos permiten implementar algoritmos para contar las coaliciones que tienen determinadas propiedades. Los antecedentes de esta aproximación son los trabajos de Cantor (ver Lucas, 1983), Brams y Affuso (1976). Posteriormente, Tannenbaum (1997) elaboró algoritmos para calcular índices de poder en juegos de mayoría ponderada, usando el sistema **Mathematica**. En esta sección, proponemos nuevos algoritmos para calcular el índice de Banzhaf para juegos de doble y triple mayorías.

***Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Sevilla e investigador de centrA.**

En la quinta sección, se presentan los resultados obtenidos al calcular el índice de Banzhaf para la Unión Europea ampliada a 25 países, usando la regla de decisión aprobada en la cumbre de Niza. La principal conclusión que obtenemos es que la regla de triple mayoría aprobada en la cumbre de Niza es equivalente en la práctica a un juego de mayoría simple. Con esta regla, la cuota de población exigida para aprobar una decisión no cambia el índice de poder de Banzhaf de los países de la Unión Europea ampliada. La participación de los ciudadanos de una nación de la Unión Europea en las instituciones europeas es doblemente indirecta. En la primera fase, deben elegir a sus representantes para el Parlamento Europeo y para sus instituciones nacionales; que son las que posteriormente designan delegados de cada nación para la Comisión y el Consejo. Para calcular el poder de un ciudadano europeo en la sección sexta, usaremos el modelo de votación compuesta propuesto por Felsenthal y Machover (1998). Con dicho modelo, analizaremos el poder del ciudadano de una nación europea con la regla de Niza y con la nueva regla de votación propuesta por la Convención Europea para la futura Constitución de la Unión Europea.

2. Teoría de la conducta racional

Los fundamentos de una teoría de la conducta racional están constituidos por disciplinas normativas como la teoría de utilidad, la teoría de decisión y la teoría de juegos. Estas disciplinas nos proporcionan definiciones formales para construir una racionalidad normativa. Además, muchos filósofos consideran que la filosofía moral o ética es otra disciplina normativa necesaria para modelar la conducta racional. En general, la ética es considerada como una disciplina filosófica, mientras que el resto de las teorías mencionadas son disciplinas científicas y específicamente, disciplinas matemáticas. Sin embargo, todas estas disciplinas usan una combinación de métodos matemáticos y filosóficos. Así, proponer axiomas y definiciones para los conceptos básicos es un problema filosófico, mientras que encontrar demostraciones rigurosas para los teoremas implicados por los axiomas y definiciones es un problema lógico y matemático.

Harsanyi (1992) propone dividir la teoría general de la conducta racional en dos ramas: una teoría de la conducta racional individual y una teoría de la conducta racional en un marco social. La teoría de utilidad en una situación de certidumbre y la teoría de decisión cuando existe incertidumbre constituyen la teoría de la conducta racional individual. Por otro lado, Harsanyi divide la teoría de la conducta racional en un marco social en teoría de juegos y ética. La teoría de juegos analiza y modela situaciones en las que dos o más individuos con diferentes intereses tratan de maximizar dichos intereses (egoístas o altruístas) de una manera racional. En contraste, la ética se ocupa de estudiar la conducta de dos o más individuos con intereses personales diferentes, pero que cooperan para fomentar, de una manera racional, los intereses que ellos consideran beneficiosos para el conjunto de su sociedad.

Respecto a la aplicación de la teoría de juegos a la política, Sartori (1988) da la siguiente interpretación de las reglas de decisión:

> «El órgano que adopta las decisiones tiene *costes* (cualquiera que sea la cuestión en juego), y la colectividad receptora afronta *riesgos* (cualesquiera que resulten ser). Así pues, cuando optamos por una regla mayoritaria determinada tenemos que lograr un equilibrio entre la conveniencia (la reducción de los costes de las decisiones) y la seguridad (la disminución de los riesgos externos); y ese equilibrio se consigue con topes mayoritarios diferentes en función de la mayor o menor importancia de la cuestión que debe decidirse en cada caso.»

3. Juegos de votación ponderada

Los modelos que usaremos se denominan *juegos de votación ponderada* y permiten asignar a cada jugador un índice de poder que mide su capacidad para lograr coaliciones que superen la cuota adoptada para tomar decisiones. En primer lugar, un juego simple en un conjunto finito de jugadores $N=\{1,\ldots,n\}$ se define mediante una función característica $v:2^N\to\{0,1\}$ que asocia a cada subconjunto $S\subseteq N$ de jugadores el valor 1 si *S* es ganadora y el valor 0 si *S* es perdedora. Además $v(\varnothing)=0$, $v(N)=1$ y la función es monótona, es decir, la relación $S\subseteq T$ implica que $v(S)\leq v(T)$.

Un caso particular de juego simple es un juego en el que cada jugador, que puede ser una nación, un miembro de una comisión, un grupo parlamentario, etc., dispone de un número de votos y una decisión se aprueba si una coalición de jugadores suma los votos suficientes para superar una cuota establecida. Entonces, un juego de votación ponderada en el conjunto $N=\{1,\ldots,n\}$ de jugadores es un vector $[q;w_1,\ldots,w_n]$, siendo $q\in\mathbb{R}$ un número real no negativo que representa la cuota para ganar y cada w_i el número de votos asignado a cada jugador *i* en la votación. En general, supondremos que $0 < q < \sum_{i \in N} w_i$.

La función característica $v : 2^N \to \{0,1\}$ de un juego de votación ponderada es

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(S) \geq q, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$. Por ello, un juego de votación ponderada se representa mediante

$$v \equiv [q; w_1, \dots, w_n].$$

Si tenemos un número finito de juegos simples $v_1, \dots, v_m$ podemos definir el juego simple

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m)(S) = \min_{1 \leq t \leq m} v_t(S).$$

Observemos que si cada $v_t \equiv \left[q_t; w_1^t, \dots, w_n^t \right]$ es un juego de votación ponderada, entonces el juego de *m* mayorías $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ viene definido por:

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_m)(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } w^t(S) \geq q_t,\ 1 \leq t \leq m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Shapley y Shubik (1954) definen un índice para medir el poder individual de un jugador aplicando la teoría de juegos cooperativos de *n* personas, fundada por von Neumann y Morgenstern (1953). El índice de poder que definen es la contribución marginal esperada de un jugador que convierte una coalición perdedora en ganadora. Teniendo en cuenta que existen $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ permutaciones posibles de los *n* jugadores, la probabilidad de que un jugador *i* se reuna exactamente con $(s-1)$ jugadores es

$$g(s) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}.$$

Entonces, el índice de poder de Shapley-Shubik para cada jugador *i* viene dado por la fórmula

$$\Phi_i = \sum_S g(s),$$

donde *s* es el número de jugadores de la coalición *S*, y la suma está extendida a todas las coaliciones ganadoras *S* que contienen al jugador *i*, siendo la coalición $S \setminus \{i\}$ perdedora.

Ejemplo 1. El método de votación del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas, antes de 1965, venía dado por el juego

$$[27; 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1],$$

donde las naciones permanentes (Estados Unidos, Rusia, China, Reino Unido y Francia) tenían cinco votos y el poder de veto. En efecto, cualquier coalición que no incluya a alguna de dichas naciones tiene a lo sumo $(5 \times 4) + 6$ votos, con lo que nunca podrá ser una coalición ganadora.

La reforma del Consejo de Seguridad amplió, en 1965, el número de naciones no permanentes desde seis a diez cambiando simultaneamente el número de votos de los cinco grandes. Ello dió lugar al siguiente modelo de juego en el que se mantiene el poder de veto de las cinco naciones permanentes,

$$[39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1].$$

La fórmula de Shapley-Shubik, aplicada al Consejo de Seguridad de la ONU, antes de 1965, daba un poder a cada uno de los cinco miembros permanentes de $\Phi_p = 0.1974$ y el poder de cada uno de los seis miembros temporales era de $\Phi_t = 0.00216$. La ampliación a quince naciones redujo el poder (veáse Lucas, 1983) a

$$\Phi_p^* = 0.1963, \qquad \Phi_t^* = 0.00186.$$

Entonces, podemos observar que las pérdidas absolutas de los países permanentes son del orden de 10^{-3} y las de los países temporales de 3×10^{-4}. Sin embargo, las pérdidas relativas son

$$\frac{\Phi_p - \Phi_p^*}{\Phi_p^*} = 0.005, \qquad \frac{\Phi_t - \Phi_t^*}{\Phi_t^*} = 0.16,$$

con lo que las pérdidas relativas de los países permanentes son 32 veces las pérdidas de los países temporales.

Para definir el índice de Banzhaf introducimos el concepto de *swing*. Un swing para un jugador i es un par de coaliciones $(S \cup \{i\}, S)$ tales que $i \notin S$, la coalición $S \cup \{i\}$ es ganadora y la coalición S es perdedora. A partir de ahora, escribiremos $S \cup i$ en vez de $S \cup \{i\}$ y $S \setminus i$ en lugar de $S \setminus \{i\}$. Para cada jugador $i \in N$, denotamos como $\eta_i(v)$ el número de swings para el jugador i en el juego (N,v), es decir, el número de coaliciones para las que el jugador i es decisivo. El *índice de Banzhaf normalizado* para el jugador i es

$$\beta_i(v) = \frac{\eta_i(v)}{\bar{\eta}(v)}, \qquad 1 \le i \le n,$$

siendo $\bar{\eta}(v) = \sum_{i \in N} \eta_i$.

Dubey y Shapley (1979) consideran el índice de poder de Banzhaf probabilístico

$$\beta_i'(v) = \frac{\eta_i(v)}{2^{n-1}}, \qquad 1 \le i \le n.$$

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente juego de votación ponderada en el pleno del Ayuntamiento de Sevilla, elegido el 25 de Mayo de 2003,

$$N = \{1 = \text{PSOE}, 2 = \text{PP}, 3 = \text{PA}, 4 = \text{IU}\}, \qquad v \equiv [17;14,12,4,3].$$

Para calcular el índice de poder de Banzhaf normalizado, usando la definición, hay que determinar primero, los votos y el valor de cada coalición.

Coalición	Votos	Valor
$\emptyset$	0	0
{1}	14	0
{2}	12	0
{3}	4	0
{4}	3	0
{1,2}	26	1
{1,3}	18	1
{1,4}	17	1
{2,3}	16	0
{2,4}	15	0
{3,4}	7	0
{1,2,3}	30	1
{1,2,4}	29	1
{1,3,4}	21	1
{2,3,4}	19	1
{1,2,3,4}	33	1

Las coaliciones S tales que $(S \cup i, S)$ es un swing para el jugador i, son

Jugador	Coaliciones
1	{2}, {3}, {4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}
2	{1}, {3,4}
3	{1}, {2,4}
4	{1}, {2,3}

Por tanto, el número de swings para cada jugador es

Jugador	Swings
1	6
2	2
3	2
4	2

El número total de swings es $\overline{\eta}(v) = 12$, el índice de Banzhaf normalizado es

$$\beta(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

y el índice de Banzhaf probabilístico es

$$\beta'(v) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

4. Cálculo de los índices de poder

El método combinatorio más usual para contar el número $f(n)$ de elementos de un conjunto finito S_n, donde $n \in N$, es obtener su función generatriz $F(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) x^n$. Por ejemplo, para cada $n \in N$, el número de subconjuntos de k elementos del conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ viene dado por el número combinatorio

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Para calcular la función generatriz de estos números, sea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n elementos. Multiplicando, obtenemos

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_n\right)=\sum_{T\subseteq S}\prod_{x_i\in T}x_i$$

Si tomamos $x_i = x,$

$$\left(1+x\right)^n=\sum_{T\subseteq S}\prod_{x_i\in T}x=\sum_{T\subseteq S}x^{|T|}=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k.$$

En esta sección, consideraremos funciones generatrices de varias variables para contar las coaliciones que cumplen determinadas propiedades, con lo que usaremos expresiones como

$$f(x,y)=\sum_{k\geq 0}\sum_{r\geq 0}f(k,r)x^k y^r.$$

Proposición 1. *Sea* (N,v) *un juego de doble mayoría con* $v\equiv v_1\wedge v_2$, *donde* $v_1=[q;w_1,\ldots,w_n]$ *y* $v_2=[p;p_1,\ldots,p_n]$. *Para todo* $i\in N$, *el número de swings del jugador i viene dado por*

$$\eta_i\left(v\right)=\sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)}\sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)}b_{kr}^i-\sum_{k=q}^{w(N\backslash i)}\sum_{r=p}^{p(N\backslash i)}b_{kr}^i,$$

donde b_{kr}^i *es el número de coaliciones S tales que* $i\notin S$ *con* $w(S)=k$ *y* $p(S)=r$ *.*

Demostración. Consideremos el conjunto de todas las coaliciones S tal que $i\notin S$ con $w(S)\geq q-w_i$ y $p(S)\geq p-p_i$, cuyo cardinal viene dado por

$$s_1^i=\sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)}\sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)}b_{kr}^i.$$

Como $w(S\cup i)\geq q$ y $p(S\cup i)\geq p$, tenemos que s_1^i coincide con el número de coaliciones ganadoras a las que *i* pertenece. Por otro lado, dentro del conjunto de coaliciones ganadoras que contienen al jugador *i*, consideramos el subconjunto de aquellas coaliciones donde el jugador *i* no es decisivo para hacerlas ganadoras. El cardinal de este subconjunto, que coincide con el conjunto de todas las coaliciones S tal que $i\notin S$ con $w(S)\geq q$ y $p(S)\geq p$, viene dado por

$$s_2^i=\sum_{k=q}^{w(N\backslash i)}\sum_{r=p}^{p(N\backslash i)}b_{kr}^i.\quad\square$$

Proposición 2. *Sea* (N,v) *un juego de doble mayoría con* $v \equiv v_1 \wedge v_2$, *donde* $v_1 = [q; w_1, \ldots, w_n]$ *y* $v_2 = [p; p_1, \ldots, p_n]$. *Para todo* $i \in N$, *la función generatriz de* $\left\{ b_{kr}^i \right\}_{k,r \geq 0}$, *donde* b_{kr}^i *es el número de coaliciones tales que* $i \notin S$, $w(S) = k$ *y* $p(S) = r$ *viene dada por*

$$B_i(x,y) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \left(1 + x^{w_j} y^{p_j} \right).$$

Demostración. Desarrollando el polinomio $B(x,y) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + x^{w_j} y^{p_j} \right)$, obtenemos

$$B(x,y) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x^{w_i} y^{p_i} = \sum_{S \subseteq N} x^{w(S)} y^{p(S)} = \sum_{k=0}^{w(N)} \sum_{r=0}^{p(N)} b_{kr} x^k y^r.$$

Por lo tanto, $B(x,y)$ es una función generatriz para los números $\left\{ b_{kr} \right\}_{k,r \geq 0}$, donde b_{kr} es el número de coaliciones $S \subseteq N$ tal que $w(S) = k$ y $p(S) = r$. Finalmente, para obtener los números $\left\{ b_{kr}^i \right\}_{k,r \geq 0}$, eliminaremos el factor $\left(1 + x^{w_i} y^{p_i} \right)$ en el polinomio $B(x,y)$ obteniendo la función $B_i(x,y)$. □

Con el objeto de facilitar el cálculo de los coeficientes $\left\{ b_{kr}^i \right\}_{k,r \geq 0}$, que usaremos para determinar el número de swings, almacenamos dichos coeficientes en la matriz

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & y & y^2 & y^3 & \ldots & y^{p-p_i} & \ldots & y^p & \ldots & y^{p(N \backslash i)} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{q-w_i} \\ \vdots \\ x^q \\ \vdots \\ x^{w(N \backslash i)} \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccccc} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right)
\end{array}.$$

Observemos que el término

$$s_1^i = \sum_{k=q-w_i}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p-p_i}^{p(N\backslash i)} b_{kr}^i ,$$

que representa el número de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador *i*, se obtiene sumando los términos no nulos comprendidos entre la fila $q-w_i+1$ y la fila $w(N\setminus i)+1$ y entre la columna $p-p_i+1$ y la columna $p\left(N\setminus i\right)+1$.

Seguidamente, se determina el cardinal del subconjunto de coaliciones ganadoras a las que pertenece el jugador *i* pero en las que su presencia no es necesaria para que sean ganadoras,

$$s_2^i = \sum_{k=q}^{w(N\backslash i)} \sum_{r=p}^{p(N\backslash i)} b_{kr}^i .$$

Este cardinal se calcula sumando los elementos no nulos del bloque constituido por las filas que van desde la la fila $q+1$ hasta la fila $w(N\setminus i)+1$, y por las columnas comprendidas entre la columna $p+1$ y la columna $p\left(N\setminus i\right)+1$, ambas inclusive. Por último, el número de swings del jugador *i* se obtiene evaluando la diferencia $\eta_i\left(v\right)=s_1^i-s_2^i$.

Este método se extiende a juegos de *m* mayorías $v_1\wedge\cdots\wedge v_m$, obteniéndose fórmulas y algoritmos semejantes para calcular los índices de poder de Banzhaf y Shapley-Shubik (véase Algaba, Bilbao, Fernández, Jiménez y López, 2002 y 2003).

Ejemplo 3. Consideremos el juego de doble mayoría $v\equiv v_1\wedge v_2$, donde $v_1=[5;3,2,2,1]$ y $v_2=[3;1,1,1,1]$. Su función característica es

$$\left(v_1\wedge v_2\right)\left(S\right)=\begin{cases}1 & \text{si } w\left(S\right)\geq 5 \text{ y } p(S)\geq 3,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

En primer lugar, calcularemos las funciones $B_i(x,y)=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(1+x^{w_j}y^{p_j}\right),\quad 1\leq i\leq 4,$

$$\begin{aligned}
B_1(x,y)&=1+xy+2x^2y+2x^3y^2+x^4y^2+x^5y^3,\\
B_2(x,y)&=1+xy+x^2y+x^3y+x^3y^2+x^4y^2+x^5y^2+x^6y^3,\\
B_3(x,y)&=1+xy+x^2y+x^3y+x^3y^2+x^4y^2+x^5y^2+x^6y^3,\\
B_4(x,y)&=1+2x^2y+x^3y+x^4y^2+2x^5y^2+x^7y^3.
\end{aligned}$$

Observemos que la matriz que contiene los coeficientes de $B_1(x,y)$ es

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & y & y^2 & y^3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Ahora, calcularemos el número de swings de cada jugador:

$$
\begin{aligned}
\eta_1(v) &= \sum_{k=2}^{5}\sum_{r=2}^{3} b_{kr}^{1} - \sum_{k=5}^{5}\sum_{r=3}^{3} b_{kr}^{1} = 4-1 \ = 3,\\
\eta_2(v) &= \sum_{k=3}^{6}\sum_{r=2}^{3} b_{kr}^{2} - \sum_{k=5}^{6}\sum_{r=3}^{3} b_{kr}^{2} = 4-1 = 3,\\
\eta_3(v) &= \sum_{k=3}^{6}\sum_{r=2}^{3} b_{kr}^{3} - \sum_{k=5}^{6}\sum_{r=3}^{3} b_{kr}^{3} = 4-1 = 3,\\
\eta_4(v) &= \sum_{k=4}^{7}\sum_{r=2}^{3} b_{kr}^{4} - \sum_{k=5}^{7}\sum_{r=3}^{3} b_{kr}^{4} = 4-1 = 3.
\end{aligned}
$$

Como el número total de swings es $\overline{\eta}(v) = 12$, el índice normalizado de Banzhaf es

$$
\beta(v) = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).
$$

Proposición 3. *Sea* (N,v) *un juego de doble mayoría con* $v \equiv v_1 \wedge v_2$, *donde* $v_1 = [q; w_1,\ldots,w_2]$ *y* $v_2 = [p; p_1,\ldots,p_2]$. *Entonces:*

(a) el número c de términos de $B(x,y) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + x^{w_j} y^{p_j}\right)$ *verifica*

$$
n+1 \le c \le \min(2^n, w(N)p(N)+1),
$$

(b) el número de términos de $B_i(x,y) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}\left(1 + x^{w_j} y^{p_j}\right)$, *para cada* $i \in N$, *está acotado por c.*

Demostración. Si cada jugador tiene el mismo peso, es decir, $w_i = w$ y $p_i = p$ para todo $1 \le i \le n$, entonces el número de términos de $B(x,y) = \left(1 + x^w y^p\right)^n$ es $n+1$. Si los pesos no son iguales, entonces $n+1$ será menor o igual que el número c de términos de $B(x,y)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^{w_j}y^{p_j}\right)$. Por otra parte, tenemos que

$$B(x,y)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^{w_j}y^{p_j}\right)=\sum_{k=0}^{w(N)}\sum_{r=0}^{p(N)}b_{kr}x^k y^r$$

es un polinomio de grado $w(N)$ en x y grado $p(N)$ en y, además no contiene elementos tales como x^k o y^r. Entonces, $c\leq w(N)p(N)+1$ y en el peor de los casos $c\leq 2^n$ porque todos los exponentes de los términos son diferentes, y en ese caso el número c coincide con el número de subconjuntos de N. □

Las cotas obtenidas para el número c de coeficientes no nulos del polinomio $B(x,y)$ nos proporcionan una medida de la *complejidad* del problema de calcular índices de poder con funciones generatrices. La complejidad temporal de estos algoritmos ha sido estudiada por Bilbao, Fernández, Jiménez y López (2002).

5. El poder de las naciones en el Consejo

Uno de los acuerdos fundamentales de la cumbre de Jefes de Estado y de Gobierno de la Unión Europea, celebrada en Niza en diciembre de 2000, fue la aprobación de nuevos sistemas de votación de cara a la ampliación de la misma. Se debatieron diversos sistemas de votación para regular el funcionamiento del Consejo de la Unión Europea, aprobándose dos modelos de triple mayoría con una reponderación de los votos actuales. Ambos modelos corresponden a votos ponderados, número de naciones y población. Las reglas de Niza se establecen para la ampliación de la Unión Europea a 25 naciones, por lo que el número total de coaliciones es mayor que 33 millones. Por ello, las argumentaciones basadas únicamente en el análisis de una docena de coaliciones ganadoras, carecen de fundamento racional. Por ejemplo, para la primera regla aprobada en Niza, Alemania es decisiva en más de novecientas mil coaliciones.

La regla de decisión aprobada en Niza es el juego triple $v_1\wedge v_2\wedge v_3$, donde los juegos de votación ponderada correspondientes a votos, países y población, son:

$$v_1\equiv[232;29,29,29,29,27,27,13,12,12,12,12,12,10,10,7,7,7,7,7,4,4,4,4,4,3],$$
$$v_2\equiv[13;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1],$$
$$v_3\equiv[620;182,131,131,128,89,86,35,23,23,23,22,22,20,18,12,12,11,8,8,5,4,3,2,1,1].$$

El juego v_1 consiste en asignar a cada uno de los 25 miembros de la Unión Europea los votos y la cuota que se aprobaron en la cumbre de Niza. El juego v_2 es un juego de mayoría simple en el que todos los países tienen un voto. Por último, el juego v_3 se define asignando, a cada país, un número de votos igual al tanto por mil de su población sobre la población total de la Unión Europea y la cuota representa el 62% de la población total. Así, una votación será favorable cuando la respalden 13 países que cuenten con al menos 232 votos, y al menos sumen el 62% de la población.

A continuación, presentamos una tabla que contiene los índices de poder de Banzhaf de los 25 países europeos en el juego de las regla de Niza. Los índices de Banzhaf del juego v_1 se incluyen en la columna **Banzhaf 1**, los índices de Banzhaf de los juegos doble $v_1 \wedge v_2$ y triple $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ se muestran en las columnas **Banzhaf 2** y **Banzhaf 3**, respectivamente. Para realizar los cálculos que se presentan en la tabla, se han implementado los algoritmos descritos en el programa **Mathematica** (véase Bilbao, Fernández y López, 2001).

	Banzhaf 1	Banzhaf 2	Banzhaf 3
Alemania	0.0857	0.0856	0.0856
Reino Unido	0.0857	0.0856	0.0856
Francia	0.0857	0.0856	0.0856
Italia	0.0857	0.0856	0.0856
España	0.0813	0.0812	0.0812
Polonia	0.0813	0.0812	0.0812
Países Bajos	0.0423	0.0423	0.0423
Grecia	0.0391	0.0391	0.0391
República Checa	0.0391	0.0391	0.0391
Bélgica	0.0391	0.0391	0.0391
Hungría	0.0391	0.0391	0.0391
Portugal	0.0391	0.0391	0.0391
Suecia	0.0327	0.0327	0.0327
Austria	0.0327	0.0327	0.0327
República Eslovaca	0.0231	0.0231	0.0231

Dinamarca	0.0231	0.0231	0.0231
Finlandia	0.0231	0.0231	0.0231
Irlanda	0.0231	0.0231	0.0231
Lituania	0.0231	0.0231	0.0231
Letonia	0.0132	0.0133	0.0133
Eslovenia	0.0132	0.0133	0.0133
Estonia	0.0132	0.0133	0.0133
Chipre	0.0132	0.0133	0.0133
Luxemburgo	0.0132	0.0133	0.0133
Malta	0.0099	0.0099	0.0099

A partir de esta tabla y los índices de población, obtenemos las siguientes conclusiones:

1. La regla de decisión de Niza, que es un sistema de triple mayoría, es equivalente al primer juego de mayoría cualificada en el que sólo intervienen los votos. El índice de poder de Banzhaf de todos los países es prácticamente el mismo con el juego simple v_1, con el juego doble $v_1 \wedge v_2$ y con el juego triple $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. Con esta regla, la cuota de población del 62% exigida para aprobar una decisión no cambia el poder.
2. Alemania, el Reino Unido, Francia e Italia tienen el mismo poder, con un índice de Banzhaf igual a 0.0857, que es inferior a sus respectivos índices de población.
3. La regla de decisión penaliza más a Alemania, si se usa el criterio de comparar su índice de poder con su índice de población.
4. El poder de decisión de Alemania crecerá en función de su posición territorial, su demografía y su capacidad inversora en los países de Europa central y oriental que se incorporarán a la Unión; y no como consecuencia de la nueva regla de decisión aprobada en Niza.
5. España y Polonia tienen una posición muy equilibrada si se comparan su índice de Banzhaf, su índice de votos, y su índice de población. Además, ambos países tienen un poder de decisión muy próximo al de los cuatro grandes de la Unión Europea.
6. Los Países Bajos tienen un índice de votos y de poder superiores a su índice de población. Los demás países tienen un índice de poder superior a sus índices de población y votos.

La nueva regla de votación propuesta por la Convención Europea para la futura Constitución Europea altera de manera muy notable el poder de España, Polonia y el resto de las naciones de menor población en el seno del Consejo. La razón es que se eliminan los votos ponderados que se aprobaron en Niza y con la nueva regla para aprobar una decisión sólo se necesitan 13 naciones, que sumen al menos el 60% de la población. En el siguiente cuadro, se exponen el número de coaliciones en las que Alemania, Francia y España son decisivas usando la regla de Niza y la regla de la Convención Europea.

	Regla de Niza	Convención Europea
Alemania	923614	5167306
Francia	923558	3679434
España	876310	2693938

Los índices de poder de Banzhaf se obtienen dividiendo las coaliciones decisivas de cada nación por el número total de dichas coaliciones, por lo que Alemania aumenta su poder en un 50%; el Reino Unido, Francia e Italia lo aumentan en un 12%, mientras que el poder de España y el resto de las naciones europeas, excepto las seis con menor población, disminuye. Si aumentamos la cuota de población desde el 60% al 66%, los resultados que se presentan en la siguiente tabla indican que este desequilibrio de poder se mantiene.

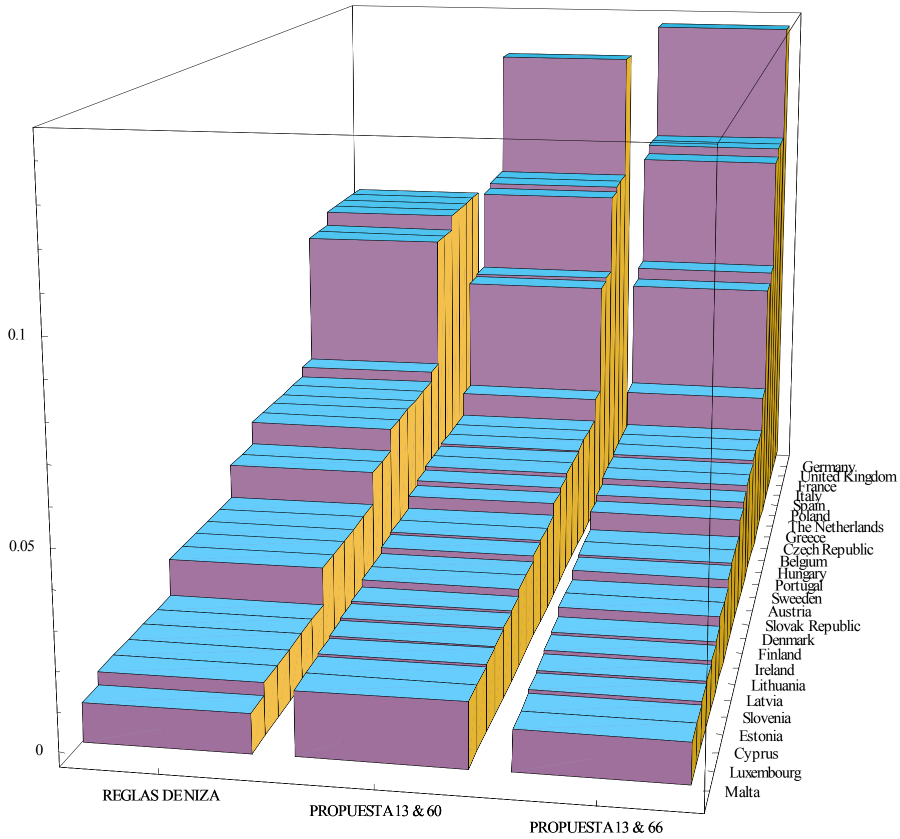
	Regla de Niza	Regla del 60%	Regla del 66%
Alemania	0.085	0.133	0.144
Reino Unido	0.085	0.095	0.108
Francia	0.085	0.095	0.108
Italia	0.085	0.093	0.106
España	0.081	0.069	0.073
Polonia	0.081	0.068	0.070
Países Bajos	0.042	0.036	0.039
Grecia	0.039	0.029	0.028
República Checa	0.039	0.029	0.028
Bélgica	0.039	0.029	0.028
Hungría	0.039	0.029	0.028
Portugal	0.039	0.029	0.028

Suecia	0.033	0.027	0.026
Austria	0.033	0.026	0.024
República Eslovaca	0.023	0.023	0.020
Dinamarca	0.023	0.023	0.020
Finlandia	0.023	0.022	0.019
Irlanda	0.023	0.021	0.016
Lituania	0.023	0.021	0.016
Letonia	0.013	0.019	0.014
Eslovenia	0.013	0.018	0.013
Estonia	0.013	0.018	0.012
Chipre	0.013	0.017	0.011
Luxemburgo	0.013	0.016	0.011
Malta	0.001	0.016	0.011

Observemos que la consecuencia de aumentar la cuota de la población desde el 60% al 66% para tomar decisiones en el Consejo, es un incremento adicional del poder de Alemania en un 8%; el Reino Unido, Francia e Italia lo incrementan en un 13%; crece el poder de España, Polonia y los Países Bajos en un 6%, un 3% y un 8% respectivamente; mientras que disminuye el poder de las 18 naciones restantes.

La conclusión fundamental es que *si España renuncia a los votos ponderados de Niza, sufrirá una merma considerable de su poder absoluto y relativo en la Unión Europea.*

Con objeto de visualizar las citadas pérdidas y ganancias de poder de las naciones de la Unión Europea con respecto a las reglas aprobadas en Niza, los datos contenidos en la tabla anterior se presentan en el siguiente gráfico tridimensional.



6. El poder de los ciudadanos en el Consejo

El índice de poder de Banzhaf mide el poder de cada nación en el seno del Consejo de la Unión Europea cuando toma decisiones usando reglas de mayoría ponderada. Si deseamos medir el poder de cada ciudadano europeo, debemos tener en cuenta que la participación de los ciudadanos en las instituciones de la Unión Europea es doblemente indirecta. En una primera fase, debemos elegir a nuestros representantes para el Parlamento Europeo y para cada parlamento nacional. Las instituciones nacionales son las que posteriormente designan delegados de cada nación para la Comisión y el Consejo.

El método utilizado para medir el poder de un votante individual es el siguiente. Consideremos un juego de votación ponderada en el que los *n* pesos son iguales a 1 y la cuota es el menor entero del conjunto de los mayores o iguales que $(n+1)/2$, es decir, $q = \lceil (n+1)/2 \rceil$. En este juego, un votante *i* es un swing en una coalición ganadora S si y sólo si $i \in S$ y $|S| = q$, siendo el número de veces en las que *i* es un swing igual a

$$\binom{n-1}{q-1} = \frac{(n-1)!}{(q-1)!(n-q)!} = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} & \text{si} \quad n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!}{(k!)^2} & \text{si} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Aproximando por la fórmula de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$, obtenemos

$$\frac{(n-1)!}{(q-1)!(n-q)!} \sim \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{n\pi}}2^{n-1} & \text{si} \quad n = 2k, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi(n-1)}}2^{n-1} & \text{si} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Entonces llegamos a que el índice de Banzhaf probabilístico de *i* es

$$\beta_i' = \frac{\binom{n-1}{q-1}}{2^{n-1}} \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}},$$

si *n* es suficientemente grande.

Para calcular el poder de un ciudadano en el Consejo de la Unión Europea, usaremos el modelo de votación compuesta propuesto por Felsenthal y Machover (1998) que se apoya en el índice de Penrose.

Sean $N_1, \ldots, N_m$ asambleas de votantes disjuntas dos a dos y sea $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$. En cada asamblea N_i hay n_i votantes y consideramos un juego de votación ponderada en el que los n_i pesos son iguales a 1 y la cuota es $q_i = \lceil (n_i + 1)/2 \rceil$. Además, suponemos que cada delegado $i \in \{1, \ldots, m\}$ vota a favor de una propuesta si la mayoría de los votantes de N_i la han apoyado y se opone en otro caso. Felsenthal y Machover (1998) han demostrado que

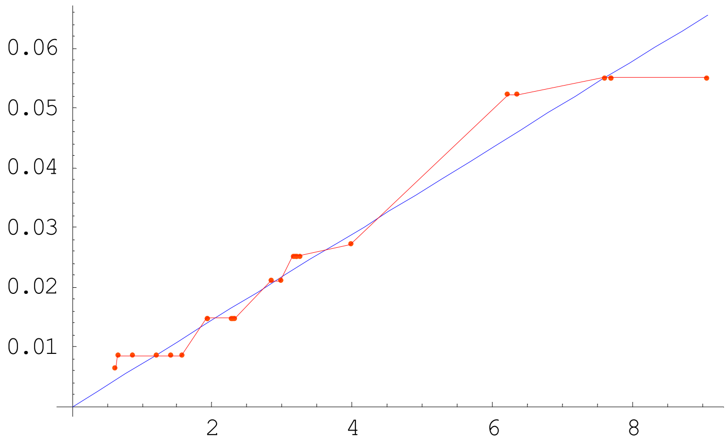
$$\beta_x' \sim \beta_i' \sqrt{\frac{2}{\pi n_i}},$$

donde β_x' es el índice de Banzhaf probabilístico de un votante cualquiera y β_i' es el índice de Banzhaf probabilístico del delegado de la asamblea N_i. Como consecuencia de este resultado, Felsenthal y Machover obtienen el siguiente teorema.

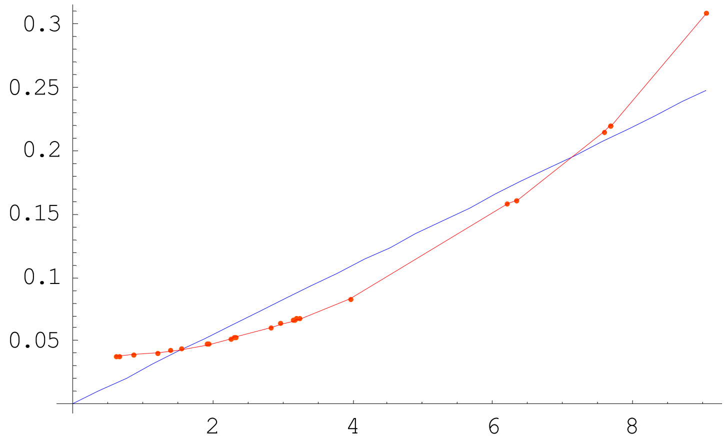
Teorema 1. *Los índices de Banzhaf probabilísticos* β_x' *son iguales para todos los votantes si y sólo si los índices de Banzhaf probabilísticos* β_i' *de los delegados son proporcionales a sus respectivas* $\sqrt{n_i}$.

En consecuencia, el poder de un ciudadano europeo es igualitario si el índice probabilístico de Banzhaf correspondiente a su nación es proporcional a la raíz cuadrada de la población de su nación.

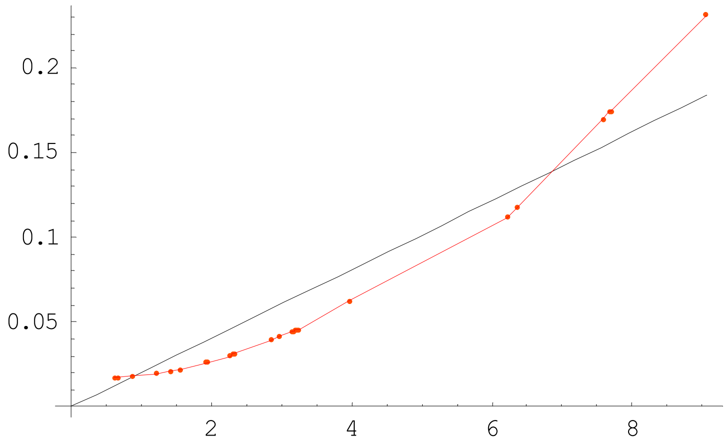
En el siguiente gráfico, realizado con la regla de Niza, en el eje horizontal se representa la raíz cuadrada de la población y en el eje vertical el índice probabilístico de Banzhaf. Con estos datos se ha calculado la recta de regresión, en la que se encuentran los puntos en los que el poder es igualitario. Puede observarse que Alemania (el punto situado más a la derecha) está situada por debajo de la recta; Francia, el Reino Unido e Italia están sobre la recta; mientras que España y Polonia tienen más poder al estar por encima de ella.



En el gráfico que se expone a continuación, realizado con la regla de la doble mayoría (al menos 13 naciones con más del 60% de la población) propuesta por la Convención Europea, podemos apreciar el gran incremento de poder de los ciudadanos alemanes, y las sustanciales pérdidas de poder de españoles, polacos y ciudadanos de los países con población intermedia.



La desigualdad en el poder de decisión de los ciudadanos, con la regla de la doble mayoría que exige al menos 13 naciones con más del 66% de la población, se incrementa en beneficio de las cuatro naciones más pobladas, como pone de manifiesto el último gráfico.



7. Bibliografia

Algaba, E., Bilbao, J.M., Fernández, J.R., López, J.J. (2003) Computing power indices in weighted multiple majority games, *Mathematical Social Sciences,* 46, 63-80.

Banzhaf III, J. F. (1965) Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis, Rutgers Law Review, 19, 317-343.

Bilbao, J.M., Fernández, J.R., López, J.J. (2001) Voting power in the 25-European Union under the Nice rules, notebook disponible en http://www.esi2.us.es/~mbilbao/notebook/eu25nice.pdf

Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jiménez, N., López, J.J. (2002) Voting power in the European Union enlargement, *European Journal of Operational Research*, 143, 181-196.

Brams, S.J., Affuso, P.J. (1976) Power and Size: A New Paradox, *Theory and Decision*, 7, 29-56.

Dubey, P., Shapley, L.S. (1979) Mathematical properties of the Banzhaf power index, *Mathematics of Operations Research*, 4, 99-131.

Felsenthal, D.S., Machover, M. (1998*) The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes*, Edward Elgar, Cheltenham.

Harsanyi, J.C. (1992) Game and Decision Theoretic Models in Ethics, en *Handbook of Game Theory, Volume 1*, Aumann, R.J., Hart, S. (eds.) 669-707, Elsevier Science Publishers.

Lucas, W.F. (1983) Measuring Power in Weighted Voting Systems, en *Political and Related Models,* Brams, S.J., Lucas, W. F., Straffin P.D. (eds.) 183-238, Springer-Verlag.

Sartori, G. (1988) *Teoría de la Democracia 1*, Alianza Universidad.

Shapley, L.S., Shubik, M. (1954) A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review*, 48, 787-792.

Tannenbaum, P. (1997) Power in Weighted Voting Systems, *The Mathematica Journal*, 7, 58-63.

Von Neumann, J., Morgenstern, O. (1953) *Theory of Games and Economic Behavior, 3rd. ed.,* Princeton, New Jersey.