UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Departamento de Matemática Aplicada II

EXTENSIÓN DE JUEGOS DEFINIDOS EN SISTEMAS DE CONJUNTOS

Encarnación Algaba Durán

Tesis Doctoral

Memoria presentada por Encarnación Algaba Durán
para optar al grado de *Doctor en Ciencias Matemáticas* por la
UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

V$^{\underline{\text{o}}}$ B$^{\underline{\text{o}}}$ de los Directores:

Fdo: J. Mario Bilbao Arrese

Fdo: Jorge J. López Vázquez

Sevilla, Octubre de 1998

Índice

Capítulo 1

Introducción

1.1 Juegos cooperativos

De forma general, puede decirse que la teoría de juegos es la teoría matemática que modela y analiza situaciones de cooperación y conflicto. Esta teoría se inicia con los trabajos de Borel (1921) [15] y von Neumman (1928) [55] y su nombre deriva del artículo *Zur theorie der gesellschaftsspiele* debido a von Neumman (1928), en el cual se establecen sus bases. Con posterioridad a la publicación de este artículo hay un período de inactividad en este campo hasta la aparición de la obra *Theory of games and economic behavior* escrita por von Neumman y Morgenstern (1944) [56], la cual originó una intensa investigación y consolidó definitivamente la teoría de juegos.

La teoría de juegos se ha desarrollado gradualmente y, en la actualidad, cuenta con potentes herramientas para modelar matemáticamente problemas económicos, sociales y políticos. A grandes rasgos, se pueden distinguir dos importantes áreas: la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos, la cual incluye a su vez dos líneas de investigación: los denominados juegos de utilidad transferible y los juegos de utilidad no transferible. Esta memoria se centrará exclusivamente en los juegos cooperativos de utilidad transferible.

Formalmente, un *juego cooperativo* de *utilidad transferible* es un par (N, v), donde N es un conjunto finito y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que asigna a cada $S \subseteq N$ un número real, verificando que $v(\emptyset) = 0$. Los elementos de $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ se denominan *jugadores*, los subconjuntos $S \in 2^N$ *coaliciones* y $v(S)$ es el *valor* de la coalición S. Para cada subconjunto de jugadores S, $v(S)$ describe la máxima ganancia o el mínimo coste que los jugadores que componen la coalición pueden lograr cuando deciden cooperar y formar la coalición S, sin considerar las acciones que los demás jugadores puedan llevar a cabo. La función v se denomina *función característica* del juego y, generalmente, se identifica el juego cooperativo (N, v) con su función característica v. El término *utilidad transferible* se refiere a que se supone que la utilidad de cada coalición puede medirse y compararse con otras, usando el orden total de $\mathbb{R}$.

Muchas situaciones reales pueden modelarse como un juego cooperativo de utilidad transferible. Para ejemplificar lo anteriormente indicado, se exponen dos de ellas, bien conocidas en la teoría de juegos.

Ejemplo 1.1 *Supóngase la siguiente situación: Una señora sale de la estación cargada de maletas y está dispuesta a pagar 10 dólares a quien se las lleve al hotel. Hay tres personas esperando para realizar este trabajo, (jugadores 1, 2 y 3) y al menos dos de ellos son necesarios para llevar todas las maletas. La situación expuesta puede ser modelada como un juego cooperativo* (N, v), *donde* $N = \{1, 2, 3\}$ *y cuya función característica viene dada por*

$$v(S) = \begin{cases} 10 & \textit{si } |S| \geq 2, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2 *Tres ciudades de la misma comarca necesitan un sistema de tratamiento de aguas residuales. Cada ayuntamiento ha hecho un estudio de* *los costes, individuales y colectivos con los otros ayuntamientos, para ver la posibilidad de ahorro. El estudio se representa en la siguiente tabla, donde* 1, 2 *y* 3*, simbolizan a cada una de las ciudades:*

COALICIÓN	COSTE	BENEFICIO
$\{1\}$	150	0
$\{2\}$	200	0
$\{3\}$	550	0
$\{1,2\}$	350	0
$\{1,3\}$	610	90
$\{2,3\}$	650	100
$\{1,2,3\}$	780	120

Esta situación se modela mediante un juego cooperativo (N, v)*, donde* $N = \{1,2,3\}$ *y la función característica* v *del juego es:*

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\} = 0, \quad v(\{1,3\}) = 90, \quad v(\{2,3\}) = 100, \quad v(\{1,2,3\}) = 120.$$

Obsérvese que el par (N, v) *representa el juego de los ahorros de costes, determinado, para cada* $S \subseteq N$*, por*

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S).$$

Es decir, los ahorros de costes, $v(S)$*, para la coalición* S *es la diferencia en costes correspondiente a la situación donde todos los miembros de* S *actúan por su cuenta y la situación en la que todos los miembros de* S *cooperan.*

En general, se denotará por Γ^N al conjunto de todos los juegos cooperativos de utilidad transferible, (N, v), en el cual se introducen las operaciones

$$\begin{array}{rll} + : & \Gamma^N \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, & (v, w) \longmapsto v + w \\ \cdot : & \mathbb{R} \times \Gamma^N \longrightarrow \Gamma^N, & (\alpha, v) \longmapsto \alpha \cdot v \end{array}$$

definidas por

$$(v+w)(S) = v(S) + w(S), \quad (\alpha \cdot v)(S) = \alpha \cdot v(S),$$

para cualquier $S \subseteq N$. Con respecto a estas operaciones, Γ^N es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. Una base está formada por el conjunto

$$\{u_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\},$$

donde

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estos juegos u_T se denominan *juegos de unanimidad*. Así, cualquier juego $v \in \Gamma^N$ puede expresarse como combinación lineal de ellos

$$v = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T)\, u_T,$$

donde los coeficientes vienen determinados por la expresión

$$\Delta_v(T) = \sum_{H \subseteq T} (-1)^{|T|-|H|}\, v(H),$$

y, siguiendo la terminología de Harsanyi [35], cada coeficiente $\Delta_v(T)$ será denominado *dividendo* de T en el juego v.

Dado que, como se indicó antes, el juego (N, v) se identifica con su función característica, las diferentes propiedades de la función v dan lugar a distintos tipos de juegos.

Un juego v se denomina *cero-normalizado* si $v(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.

Un juego v se denomina *monótono* si, para cualesquiera $S \subseteq T \subseteq N$, se verifica $v(S) \leq v(T)$.

Un juego v es *simple* si es monótono y $v(S)$ sólo toma valores en el conjunto $\{0, 1\}$, para toda coalición $S \subseteq N$. Un juego simple (N, v) se denomina *propio* si no existen coaliciones $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, que verifiquen $v(S) = v(T) = 1$.

Un juego v es *superaditivo* si, para cualesquiera $S, T \subseteq N$ con $S \cap T = \emptyset$, se verifica

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Una clase especial de juegos superaditivos son los llamados juegos *convexos*, introducidos por Shapley [71], los cuales surgen en algunas aplicaciones económicas y tienen interesantes propiedades combinatorias. Un juego v es *convexo* o *supermodular*, si para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$, se verifica la siguiente desigualdad

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Equivalentemente, (véase Driessen [24, pág. 112]), un juego v es convexo si y sólo si, para cualesquiera coaliciones $S, T \subseteq N$, tales que $S \subseteq T$ y todo $i \in N \setminus T$, se tiene

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

A continuación, se definen algunos de los conceptos de solución más estudiados en la teoría de juegos cooperativos y que aparecerán en capítulos posteriores.

En la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible se supone, en principio, que todos los jugadores que participan deciden cooperar entre ellos y formar la coalición N. Ello conduce al planteamiento de la siguiente cuestión: ¿Cómo dividir los beneficios totales entre todos los jugadores que participan en el juego? Una respuesta a esta pregunta da origen a lo que se denomina un concepto de solución.

Se llama *vector de pago* o *distribución*, a un vector $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$ donde la coordenada x_i representa el pago al jugador i. En un juego v, un vector de pago x se dice *eficiente* si distribuye exactamente el valor de la coalición N entre los jugadores; es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v\,(N)\,.$$

Los vectores de pago que cumplen este *principio de eficiencia* se llaman *preimputaciones* y, constituyen un conjunto denotado por $I^*(v)$. Así, teniendo en cuenta la idea expuesta en el párrafo anterior en general, el principio de eficiencia es lo mínimo que se le puede exigir a una solución. Una *solución* o *concepto de solución*, sobre una colección no vacía de juegos, es una aplicación ψ que asocia a cada juego cooperativo v, de dicha colección, un subconjunto $\psi\,(v)$ del conjunto de preimputaciones.

Además, parece lógico exigir que el pago a cada jugador i mediante el vector de pago x sea al menos la cantidad que el jugador puede obtener por sí mismo en el juego; esto es,

$$x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N.$$

Dicha propiedad recibe el nombre de *principio de individualidad racional* y la mayoría de los conceptos de solución, propuestos para juegos cooperativos requieren que los vectores de pago eficientes cumplan este principio. Esto da lugar al *conjunto de imputaciones*, el cual está definido por

$$I(v) = \{x \in I^*(v) : x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N\}\,.$$

Obsérvese que $I(v) \neq \emptyset$ si y sólo si $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Atendiendo a las coaliciones, el criterio de individualidad racional podría ser reforzado exigiendo que, no sólo cada jugador, sino también cada coalición $S \in 2^N$ recibiera al menos la cantidad que ésta puede obtener por sí sola; es decir, que para toda $S \subseteq N$, el vector de pago x verifique

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v\,(S)\,.$$

Estas ideas conducen a uno de los más atractivos conceptos de solución denominado *core* del juego v, definido por

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\, x(S) \geq v(S), \text{ para toda } S \subseteq N\},$$

donde $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ y $x(\emptyset) = 0$.

Si los valores $v(S)$ de las coaliciones se interpretan en términos de costes, entonces se tiene un juego cooperativo de coste y, para estos juegos, las desigualdades en las definiciones del conjunto de imputaciones y del core son las contrarias a las consideradas en las definiciones dadas.

Aunque cuando Gillies introdujo el core (1953) [31] ya existían otros conceptos de solución, puede decirse que éste fue el primer concepto de solución satisfactorio, porque implica un reparto razonable para todas las coaliciones. Sin embargo, presenta el inconveniente que, en muchos casos, puede ser un conjunto vacío. Bondareva (1963) y Shapley (1967) dieron, independientemente, una caracterización de los juegos con core no vacío, basada en los conceptos de *colección equilibrada* y de *juego equilibrado*.

Dado (N, v) un juego cooperativo, una colección $\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ de subconjuntos de N, distintos y no vacíos, se dice que es *equilibrada sobre* N si existen números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ —denominados *pesos*— tales que, para todo $i \in N$,

$$\sum_{\{j : i \in S_j\}} \alpha_j = 1.$$

Si, para cualquier colección equilibrada sobre N, se verifica que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N),$$

entonces se dice que el juego (N, v) es *equilibrado*.

Bondareva [14] y Shapley [70] demuestran que la clase de juegos equilibrados coincide con la clase de juegos con core no vacío.

Cercano al concepto de juego equilibrado está la noción de equilibrio total. Un juego (N, v) se dice *totalmente equilibrado* si los subjuegos inducidos (S, v_S) son equilibrados para toda $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Aquí se entiende por subjuego inducido (S, v_S) aquél cuya función característica viene determinada por

$$v_S(T) = v(T), \text{ para toda } T \subseteq S.$$

Otro concepto de solución, estudiado por von Neumann y Morgenstern (1944) [56], es el de *conjunto estable*. Los conjuntos estables son descritos en términos de una relación entre imputaciones llamada *dominación* y, por tanto, requieren que el conjunto de imputaciones sea no vacío.

Si x e y son imputaciones para un juego v y S es un subconjunto no vacío de N, entonces *x domina a y a través de la coalición S* si se verifica

$$x_i > y_i \text{ para todo } i \in S \quad \text{y} \quad x(S) \leq v(S).$$

Ello, se denotará por $x \operatorname{dom}_S y$. En este caso, la coalición S prefiere la distribución x sobre la y, porque cada miembro de S obtiene más y S no sobrepasa su valor con esta imputación. En general, se dice que x domina a la imputación y, si existe una coalición S de forma que $x \operatorname{dom}_S y$. Es inmediato que la definición de dominancia excluye la dominación a través de la coalición N y de las coaliciones unitarias.

Un subconjunto V del conjunto de imputaciones es un conjunto estable para el juego v si ningún elemento en V es dominado por otro elemento de V (*estabilidad interna*) y si cada elemento que no esté en V es dominado por alguno del conjunto V (*estabilidad externa*).

Este concepto de solución presenta dos grandes inconvenientes: el cómputo es complejo y la existencia de conjuntos estables no está garantizada. Así, Lucas (1968) [47], (1969) [48] describió un juego de diez personas, sin ningún conjunto estable. Sin embargo, algunos juegos tienen infinitos conjuntos estables y existen también juegos con un único conjunto estable. Una condición que garantiza la unicidad de los conjuntos estables puede ser encontrada en [24, Corolario 4.3].

Los conceptos anteriores pueden considerarse como conceptos de solución en el sentido que asignan a cada juego un conjunto de pagos razonables. El hecho de que estas soluciones no asignen un único pago, sino un conjunto de pagos, que en determinadas circunstancias es el vacío, puede que sea una desventaja. Podría ser deseable obtener una distribución de pagos como referencia y que los jugadores, en determinados momentos, deseen consultar. Por ello se plantea el estudio de asignar a cada juego un único pago y surgen los denominados conceptos de solución punto. Entre ellos, merece especial atención el *valor de Shapley*, (1953) [69], que asigna un único vector de pago para cada juego y queda caracterizado mediante un sistema de axiomas. Un estudio detallado de este valor, considerado como uno de los más interesantes conceptos de solución en la teoría de juegos cooperativos, puede encontrarse en Roth (1988) [66].

Shapley propone el concepto de valor de un juego cooperativo (N, v) dado, para cada jugador i, por la siguiente expresión combinatoria,

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \gamma(S) \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right],$$

donde $\gamma(S) = \dfrac{s!\,(n-1-s)!}{n!}$, $s = |S|$ y $n = |N|$.

Esta expresión indica que el valor de Shapley, $\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$, de un juego v, es una media ponderada de las *contribuciones marginales,* definidas por $v(S \cup \{i\}) - v(S)$, de los jugadores a las distintas coaliciones. Puede comprobarse que la fórmula anterior es equivalente a esta otra expresión para el valor de Shapley

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v(S) - v(S \backslash \{i\}) \right],$$

siendo ahora, $\gamma(S) = \dfrac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}$.

En lo que sigue, se exponen algunos resultados relacionados con el valor de Shapley que serán fundamentales en el desarrollo de algunas demostraciones posteriores.

Sean (N, v) un juego cooperativo y $S \subseteq N$ una coalición fija. La coalición S se dice que es un *soporte* para el juego v si, para toda $T \subseteq N$, se verifica que $v(T) = v(T \cap S)$. En este caso,

$$\sum_{j \in N} \Phi_j(v) = \sum_{j \in S} \Phi_j(v) = v(S).$$

En efecto, el valor de Shapley da lugar a un vector de pagos eficiente y, por tanto,

$$\sum_{j \in N} \Phi_j(v) = v(N) = v(N \cap S) = v(S).$$

Por otro lado,

$$\sum_{j \in N} \Phi_j(v) = \sum_{j \in S} \Phi_j(v) + \sum_{j \notin S} \Phi_j(v) = \sum_{j \in S} \Phi_j(v),$$

puesto que si $j \notin S$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi_j(v) &= \sum_{T \subseteq N \setminus \{j\}} \gamma(T) \left[v(T \cup \{j\}) - v(T) \right] \\
&= \sum_{T \subseteq N \setminus \{j\}} \gamma(T) \left[v((T \cup \{j\}) \cap S) - v(T \cap S) \right] \\
&= \sum_{T \subseteq N \setminus \{j\}} \gamma(T) \left[v((T \cap S) \cup (\{j\} \cap S)) - v(T \cap S) \right] = 0,
\end{aligned}$$

al ser $\{j\} \cap S = \emptyset$.

Supóngase ahora, que el juego (N, v) puede descomponerse de la siguiente forma,

$$v = \sum_{k=1}^{p} w^{(k)},$$

siendo $\left\{(N, w^{(k)})\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, una colección de juegos en la que cada juego $(N, w^{(k)})$, tiene a $N^{(k)} \subseteq N$ como soporte y $N^{(i)} \cap N^{(j)} = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Entonces, se verifica:

(1) $\Phi_i(N, v) = \Phi_i(N, w^{(k)})$, para todo $i \in N^{(k)}$.

(2) $\sum_{i \in N^{(k)}} \Phi_i(N, v) = \sum_{i \in N^{(k)}} \Phi_i(N, w^{(k)}) = w^{(k)}(N^{(k)})$.

La justificación de ambas igualdades es como sigue.

(1) Si $v = \sum_{k=1}^{p} w^{(k)}$, entonces

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{k=1}^{p} \Phi_i(N, w^{(k)}),$$

debido a la linealidad del valor de Shapley.

Sea $i \in N^{(k)}$. Entonces $i \notin N^{(j)}$, para todo $j \neq k$. Luego,

$$\begin{aligned}
\Phi_i(N, w^{(j)}) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \left[w^{(j)}(S \cup \{i\}) - w^{(j)}(S)\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \left[w^{(j)}((S \cup \{i\}) \cap N^{(j)}) - w^{(j)}(S \cap N^{(j)})\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S) \left[w^{(j)}((S \cap N^{(j)}) \cup (\{i\} \cap N^{(j)})) - w^{(j)}(S \cap N^{(j)})\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma(S)\, 0 = 0,
\end{aligned}$$

al ser $\{i\} \cap N^{(j)} = \emptyset$. Por tanto,

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{k=1}^{p} \Phi_i(N, w^{(k)}) = \Phi_i(N, w^{(k)}).$$

(2) Es consecuencia inmediata del apartado anterior y de la eficiencia del valor de Shapley,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N^{(k)}} \Phi_i(N, v) &= \sum_{i \in N^{(k)}} \Phi_i(N, w^{(k)}) = \sum_{i \in N} \Phi_i(N, w^{(k)}) \\
&= w^{(k)}(N) = w^{(k)}(N \cap N^{(k)}) = w^{(k)}(N^{(k)}).
\end{aligned}$$

Un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v) se dice *simétrico* si

$$v(S) = f(|S|)\,, \text{ para toda } S \subseteq N.$$

Es interesante observar que, en un juego simétrico, el valor de Shapley viene dado por

$$\Phi_i(N, v) = \frac{1}{|N|}\, v(N),$$

ya que, como el valor de una coalición sólo depende del tamaño de cada coalición y el número de coaliciones a las que pertenece un jugador es el mismo para todos ellos, resulta que el valor de Shapley es igual para todos. Por tanto, teniendo en cuenta la eficiencia del valor,

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N),$$

se tiene que $|N|\ \Phi_i(N, v) = v(N)$ y, de aquí, $\Phi_i(N, v) = \dfrac{1}{|N|}\, v(N)$, para cualquier $i \in N$.

Finalmente, otros conceptos de solución para juegos cooperativos, que no serán tratados en esta memoria, son: el *conjunto de negociación* (1964) (Aumann y Maschler [1]), el *núcleo* (1965) (Davis y Maschler [22]), el *prenúcleo* (1972) (Maschler, Peleg y Shapley [49]), como conjuntos solución y el *nucleólo* (1969) (Schmeidler [67]), el *prenucleólo* (1975) (Sobolev [73]) y el τ-*value* (1981) (Tijs [76]) como soluciones que asignan un único vector de pago. Un estudio exhaustivo de ellos puede ser encontrado en la monografía de Driessen [24].

1.2 Conceptos básicos

Esta sección comienza con algunas nociones de la teoría de grafos y, para los conceptos que se incluyen, se utilizan las notaciones de Harary [34] y Swamy y Thulasiraman [75] fundamentalmente.

Un *grafo no dirigido* $G = (V, E)$, consiste en dos conjuntos: un conjunto finito V de elementos denominados *vértices* y un conjunto finito E de elementos llamados *aristas*. Cada arista se identifica con un par no ordenado de vértices, denominados *vértices finales*.

Se dice que dos aristas son *paralelas* si tienen los mismos vértices finales. Además, si los vértices finales de una arista coinciden, entonces la arista recibe el nombre de *lazo*.

Un grafo no dirigido se denomina *simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas. Dada una arista, se dice que es *incidente* con sus vértices finales. Dos vértices se denominan *adyacentes* si son los vértices finales de alguna arista. El número de aristas incidentes en un vértice $x \in V$, se denomina *grado* del vértice x y se denotará por $grad(x)$. Los vértices con grado uno se denominan *vértices colgantes* y si tienen grado cero se denominan *vértices aislados*.

Un *paseo* en un grafo G es una sucesión finita de vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ tales que v_{i-1} es adyacente a v_i para $i = 1, \ldots, k$. Los vértices v_0, v_k se denominan los vértices finales del paseo v_0–v_k. El número k de aristas del paseo es su longitud. Se puede observar que en un paseo, aristas y vértices pueden repetirse. Un *camino* es un paseo en el que no hay vértices repetidos, lo que implica que tampoco hay aristas repetidas. Un *ciclo* es un paseo con al menos tres vértices diferentes los cuales no aparecen repetidos, exceptuando el primero y el último.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Se dice que es *conexo* si existe un camino entre cualquier pareja de vértices distintos. Un grafo es *2-conexo* si para cualquier par de vértices $\{x, y\}$ existen al menos dos caminos que los unen y sin vértices en común, salvo los extremos x, y.

El grafo $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de $G = (V, E)$ si $V' \neq \emptyset$, $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, donde cada arista de E' es incidente con vértices de V'. Si $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$, el subgrafo de $G = (V, E)$ *inducido* por U es el subgrafo cuyo conjunto de vértices es U y contiene a todas las aristas de E incidentes con vértices de U. Se denomina *componente* de un grafo a todo subgrafo maximal conexo y un *puente* es una arista cuya eliminación aumenta el número de componentes.

Sea V un conjunto de n vértices. El *grafo completo* en V, denotado por K_n, es un grafo simple, en el que para cualquier $a, b \in V$, $a \neq b$ existe una arista $\{a, b\}$.

Un *bloque* de un grafo G es un puente o un subgrafo *2*-conexo maximal de G. Un grafo G se denomina *ciclo-completo* o *grafo bloque* si cualquier bloque es un grafo completo; es decir, si contiene un ciclo, entonces el subgrafo inducido por los vértices del ciclo es completo. En particular, los grafos sin ciclos y los grafos completos son grafos ciclo-completos.

Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos. En general, un grafo sin ciclos se denomina *bosque.*

A continuación, se presentan algunos conceptos referentes a conjuntos parcialmente ordenados, ya que, en cualquier juego cooperativo (N, v), las diferentes coaliciones que se pueden formar a partir del conjunto de jugadores junto con la relación de inclusión forman un conjunto parcialmente ordenado. Para ello, se utilizará, en lo que sigue, las notaciones de Stanley [74] y Birkhoff [13]. Al igual que en las ideas anteriormente introducidas, la exposición de conceptos y resultados relativos a estos conjuntos, se limitará a aquéllos que se utilizan a lo largo de los siguientes capítulos.

Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto y $\leq$ una relación binaria que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice que $\hat{1} \in P$ es *último elemento* de P si $x \leq \hat{1}$, para todo $x \in P$. Análogamente, se dice que $\hat{0} \in P$ es *primer elemento* de P si $\hat{0} \leq x$, para todo $x \in P$.

Como se ha indicado antes, un ejemplo de conjunto parcialmente ordenado es el conjunto 2^N de todos los subconjuntos del conjunto N, ordenado por inclusión; es decir, si $A, B \in 2^N$, entonces $A \leq B$ en 2^N si y sólo si $A \subseteq B$. Si N es finito, entonces $\left(2^N, \subseteq\right)$ es también finito.

Si $Q \subseteq P$, se define un orden parcial en Q denominado *orden inducido* de la siguiente forma: para $x, y \in Q$, $x \leq y$ en Q si y sólo si $x \leq y$ en P. Al conjunto Q se le llama *subconjunto parcialmente ordenado* inducido por el orden de P. Dos clases de subconjuntos parcialmente ordenados son los *intervalos* y las *cadenas*.

Sean x,y elementos del conjunto parcialmente ordenado P, con $x \leq y$. El conjunto

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\},$$

se llama *intervalo*. Si cualquier intervalo de $(P, \leq)$ es finito se dice que $(P, \leq)$ es *localmente finito*.

Se dice que dos elementos $x, y \in P$ son *comparables* si $x \leq y$ o bien $y \leq x$. En otro caso, son *incomparables*. Una *cadena* C de P es un subconjunto parcialmente ordenado inducido por el orden de P, en el cual no hay elementos incomparables; es decir,

$$C \subseteq P \text{ es una cadena si } x \leq y \text{ o bien } y \leq x, \text{ para todo par } \{x, y\} \subseteq C.$$

Otra clase particular de subconjuntos parcialmente ordenados inducidos por P, lo forman los llamados ideales del orden de P. Se dice que $I \subseteq P$ es un *ideal del orden* de P cuando

$$\forall x \in I, \text{ si } y \leq x \text{ entonces } y \in I.$$

En particular si $x \in P$, el conjunto

$$\langle x \rangle = \{y \in P : y \leq x\},$$

se denomina *ideal principal* del orden generado por x.

Si $x, y \in P$, se dice que y *cubre* a x si $x < y$ y no hay ningún elemento $z \in P$ que cumpla la condición $x < z < y$. Esto es, y cubre a x si y sólo si

$$x < y \quad \text{y} \quad [x, y] = \{x, y\}.$$

Cuando se consideren conjuntos parcialmente ordenados mediante la inclusión, la relación de cubrir se denotará por $\prec$.

Un elemento *maximal* de un subconjunto X de P es un elemento $a \in X$ tal que no existe $x \in X$ verificando $a < x$. Dualmente, un elemento $b \in X$ es *minimal* si no existe $x \in X$ tal que $x < b$.

Se denomina *diagrama de Hasse* de un conjunto parcialmente ordenado y finito P a un grafo cuyos vértices son los elementos de P y las aristas vienen determinadas por la relación de cubrir.

Una *cota superior* de un subconjunto X de un conjunto parcialmente ordenado P es un elemento $a \in P$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$. Si además, para cada y cota superior de X, se verifica $a \leq y$, entonces el elemento $a \in P$ es el *supremo* de X. Análogamente, se definen los conceptos de *cota inferior* y de *ínfimo* del conjunto X. Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado P para el que cualquier par de elementos de P tiene supremo e ínfimo. Usualmente, se denota:

$$a \wedge b = \inf \{a, b\}, \qquad a \vee b = \sup \{a, b\}.$$

Un retículo es *completo* si cualquier subconjunto suyo no vacío tiene supremo e ínfimo.

Una clase importante de retículos desde el punto de vista combinatorio son los *retículos distributivos.* Un retículo es distributivo si verifica

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{aligned}$$

Un tipo especial de retículo distributivo es el retículo 2^N de todos los subconjuntos de un conjunto arbitrario N. Cualquier cadena es también un retículo distributivo.

A continuación, se exponen algunos conceptos relativos al *álgebra de incidencia* de un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y la *fórmula de inversión de Möbius.*

Sea P un conjunto parcialmente ordenado localmente finito y $\mathbb{K}$ un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se dice que

$$f : P \times P \longrightarrow \mathbb{K}$$

es una *función de incidencia* de P sobre $\mathbb{K}$ si $f(x, y) = 0$ cuando $x \not\leq y$. Esta definición implica que una función de incidencia es forzosamente nula cuando se evalúa sobre pares que no constituyen intervalos de P. Se denotará por $I(P, \mathbb{K})$ al conjunto formado por las funciones de incidencia de P sobre $\mathbb{K}$. Este conjunto tiene la estructura de espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar. Además, puede definirse una segunda operación interna denominada producto o *convolución* de la siguiente forma:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{\{z : x \leq z \leq y\}} f(x, z)\, g(z, y)$$

para cualquier $(x, y) \in P \times P$. Esta operación interna $*$ tiene como elemento neutro a la *función δ de Kronecker*

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El conjunto $I(P, \mathbb{K})$ junto con las operaciones suma, producto por un escalar y convolución constituye un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, designada habitualmente por *álgebra de incidencia* $I(P, \mathbb{K})$.

Una función de $I(P, \mathbb{K})$ es la *función zeta* ζ, definida por

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para el conjunto parcialmente ordenado y localmente finito de todos los subconjuntos de un conjunto finito N, fijado cualquier $S \in 2^N, S \neq \emptyset$, la función zeta daría lugar a la función $\zeta_S : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\zeta_S(T) = \zeta(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que puede reconocerse como un juego de unanimidad. Esta forma de interpretar los juegos de unanimidad es utilizada por Faigle y Kern [30].

Dada $f \in I(P, \mathbb{K})$, la función inversa para la convolución existe si y sólo si $f(x,x) \neq 0$, para todo $x \in P$. Ello implica, que la función zeta ζ posee inversa a la que se denomina *función de Möbius* de P y se simboliza por μ. Su cálculo puede realizarse mediante las siguientes fórmulas recurrentes

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ -\sum_{\{z \,:\, x \leq z < y\}} \mu(x,z) & \text{si } x < y \text{ en } P. \end{cases}$$

Como resultado fundamental relacionado con la función de Möbius hay que resaltar la *fórmula de inversión de Möbius*, la cual establece que si P es un conjunto parcialmente ordenado en donde cualquier ideal principal del orden es finito y si $f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces, para todo $x \in P$, se verifica que

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y,x)\, g(y).$$

Si P es el álgebra booleana 2^N, la función de Möbius de P viene dada por

$$\mu(T,S) = (-1)^{|S|-|T|}.$$

De aquí, que la fórmula de inversión de Möbius para 2^N establezca lo siguiente: si $f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T) \Longleftrightarrow f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}\, g(T).$$

Por último, si P es un retículo finito y existe algún elemento $x \in P$ tal que $x \neq \hat{1}$, entonces, una consecuencia inmediata de [74, Corolario 3.9.3] es que

$$\sum_{x \in P} \mu(x, \hat{1}) = 0.$$

1.3 Cooperación parcial

En el modelo general de juegos cooperativos se supone que no hay restricciones a la cooperación entre los jugadores y, por tanto, cada subgrupo de jugadores puede unirse formando una coalición. Sin embargo, hay situaciones en las que la cooperación entre los jugadores no es completa por ciertas razones. Por ejemplo, puede haber jugadores que no quieran coaligarse por no ser afines, no tener intereses comunes o simplemente por existir algún tipo de veto a su participación.

En opinión de Harsanyi y Selten [37], existen importantes clases de juegos intermedios entre la cooperación completa y la no cooperación absoluta, para los que no existen conceptos de solución satisfactorios. La aproximación más simple a la cooperación parcial, incorporando condiciones restrictivas a la formación de coaliciones entre los jugadores, es el modelo de Aumann y Maschler [1] sobre *juegos con estructuras de coalición*. En este modelo, los jugadores se subdividen en clases formando una partición del conjunto total. Es decir, una estructura de coalición es una partición $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ del conjunto N de jugadores de tal forma que la cooperación es únicamente posible entre los jugadores que pertenecen a un elemento B_i de la estructura de coalición y dentro de él la cooperación es total. Posteriormente, Aumann y Dréze [2] introducen de forma axiomática el concepto de valor de un juego restringido por una estructura de coalición y establecen que la restricción de dicho valor, a cada elemento de la partición, es el valor de Shapley del subjuego (B_i, v_{B_i}).

Otros trabajos que han desarrollado esta línea de investigación sobre juegos cooperativos con estructuras de coalición, son debidos a Davis y Maschler [23], Owen [60], Hart y Kurz [39], Levy y McLean [44], Winter [79], [80], [81] y McLean [51]. En estos trabajos se considera el estudio de la cooperación parcial cuando la estructura de coalición ya viene dada de antemano; es decir, de forma exógena. En una línea paralela, la formación endógena de estructuras de coalición, implícita en la teoría de conjuntos estables de von Neumann y Morgenstern, es estudiada por investigadores como Shenoy [72], Bennett [5], Hart y Kurz [38], [39] y Kurz [43].

El hecho de que, para cada elemento de la estructura de coalición, la cooperación sea total, exige que las relaciones entre los jugadores, en el caso de darse, sean transitivas. Ello impone una limitación a la aplicación de este modelo. Debido a ello, Myerson [53], en 1977, en su trabajo *Graphs and cooperation in games,* propone un nuevo punto de vista para modelar la conducta cooperativa entre los jugadores.

En el modelo propuesto por Myerson, las relaciones bilaterales entre los jugadores se representan mediante un grafo no dirigido y se entiende que una coalición de jugadores es factible si el correspondiente subgrafo inducido por ella es conexo. Dado un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v), Myerson le asocia un grafo de cooperación $G = (N, E)$ cuyo conjunto de vértices N es el conjunto de jugadores y cuyo conjunto de aristas E simboliza las relaciones entre pares de jugadores. Con ello, la función característica v, asociada al juego, se modifica ya que la cooperación es ahora parcial y da lugar al *juego restringido por el grafo de cooperación*, el cual se representa por (N, v^G), donde $v^G : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definido, para toda $S \subseteq N$, por

$$v^G(S) = \sum_{S_i \in S/G} v(S_i).$$

Es decir, el valor de una coalición en el juego restringido por el grafo de cooperación es una suma de valores sobre las componentes conexas del subgrafo inducido por la coalición S.

En general, a la terna (N, v, E) se le denomina *situación de comunicación* y, para este modelo de cooperación parcial, Myerson estudia, como concepto de solución, reglas de asignación de pagos que sean eficientes en las componentes conexas de la coalición N, justas y estables. Esto es, si se denota por SC^N el conjunto de todas las situaciones de comunicación definidas sobre el conjunto N,

$$SC^N = \{(N, v, E) : (N, E) \text{ es un grafo y } (N, v) \text{ un juego cooperativo}\},$$

se investigan aquellas funciones

$$\gamma : SC^N \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (N, v, E) \longmapsto (\gamma_1 (N, v, E), \ldots, \gamma_n (N, v, E)),$$

que verifican las siguientes propiedades,

1. *Eficiente*: Para toda $(N, v, E) \in SC^N$ y para cualquier $S \in N/G$,

$$\sum_{i \in S} \gamma_i(N, v, E) = v(S).$$

2. *Justa*: Para toda $(N, v, E) \in SC^N$ y para cualquier $\{i, j\} \in E$,

$$\gamma_i(N, v, E) - \gamma_i(N, v, E \setminus \{i, j\}) = \gamma_j(N, v, E) - \gamma_j(N, v, E \setminus \{i, j\}).$$

3. *Estable*: Para toda $(N, v, E) \in SC^N$ y para cualquier $\{i, j\} \in E$,

$$\gamma_i(N, v, E) \geq \gamma_i(N, v, E \setminus \{i, j\}), \quad \gamma_j(N, v, E) \geq \gamma_j(N, v, E \setminus \{i, j\}).$$

Myerson prueba que existe una única regla de asignación de pagos que verifica las condiciones de eficiencia y justicia: el valor de Shapley correspondiente al juego restringido (N, v^G). Esta regla de asignación de pagos se conoce por el nombre de *valor de Myerson*:

$$\mu(N, v, E) = \Phi(N, v^G).$$

El modelo de cooperación parcial introducido por Myerson ha motivado una línea de investigación desarrollada en los trabajos de Owen [61], Borm [16], van den Nouweland y Borm [57], Carreras [21], Borm, Owen y Tijs [17], Borm, van den Nouweland, Owen y Tijs [18], Borm, van den Nouweland y Tijs [19], Potters y Reijnierse [63], Grafe, Mauleón e Iñarra [32] y Bilbao y

López [7], entre otros. Trabajos relacionados también con esta línea, pueden ser encontrados en Rosenthal [64], [65] y Voshtina [77]. Por otra parte, la formación endógena de coaliciones en situaciones de comunicación es analizada por Aumann y Myerson [3] y van den Nouweland [59]. Finalmente, otros modelos que guardan una estrecha relación con el planteado inicialmente por Myerson, en tanto que las relaciones entre los jugadores se modela mediante un grafo no dirigido, son estudiados por Bergantiños, Carreras y García-Jurado [6], Calvo y Lasaga [20].

En 1980, en su trabajo *Conference structures and fair allocation rules*, Myerson plantea la generalización de su modelo de cooperación parcial con la utilización de *hipergrafos de comunicación* ya que, en el caso de que la cooperación se constituyera únicamente por coaliciones de tres o más jugadores, el modelo de representación mediante un grafo de cooperación no se podría utilizar. Este estudio es continuado por van den Nouweland, Borm y Tijs [58]. Por otro lado, y motivados por problemas de optimización combinatoria, surgen otros modelos más generales de cooperación restringida como el de Faigle y Kuipers, que serán comentados más adelante.

La idea que subyace en la generalización de Myerson, es la de establecer un marco más amplio donde la relación entre los jugadores no tenga porqué estar representada por un grafo no orientado, sino que se haga la distinción básica entre coaliciones factibles y no factibles, aunque aquéllas tengan algún tipo de estructura predeterminada. Siguiendo esta línea de investigación, López [46] y Bilbao [8], [9], [10], comienzan a desarrollar un modelo de cooperación parcial basado en los denominados *sistemas de coaliciones factibles y sistemas de partición,* los cuales generalizan las situaciones de comunicación.

El estudio de los sistemas de coaliciones factibles, de los sistemas de partición y de sus respectivos juegos restringidos se ha continuado con el análisis y caracterización de los diferentes conceptos de solución que existen para cualquier juego cooperativo. En dicho estudio se pone de manifiesto la importancia del conjunto de coaliciones factibles $\mathcal{F}$ y de su estructura para la determinación de los mismos. Estos comentarios implican que sea especialmente interesante estudiar los valores del juego (N, v) únicamente sobre las coaliciones factibles. Es decir, definir el juego $(\mathcal{F}, v)$ con función característica $v : \mathcal{F} \subseteq 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Estas últimas consideraciones conectan con otro modelo de cooperación parcial, iniciado fundamentalmente por Faigle [28] y Kuipers [42]. En dicho modelo, se define el juego cooperativo sobre una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos del conjunto de jugadores, la cual no tiene ninguna estructura determinada y denominando *coaliciones factibles* a aquéllas que pertenecen a este subconjunto. Posteriormente, se extiende el juego a todas aquellas coaliciones de N que puedan expresarse como unión, no necesariamente única, de coaliciones factibles disjuntas dos a dos.

Enlazando las reflexiones realizadas en los párrafos anteriores, se ha abierto en los últimos años una línea de investigación (véase Bilbao [8], Bilbao y Edelman [11] y Bilbao, Lebrón y Jiménez [12]) en la que se asume el modelo propuesto por Faigle y se estudia un juego cooperativo definido como un par $(\mathcal{F}, v)$, donde

$$v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0,$$

siendo $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ una familia de coaliciones factibles, en el sentido de Faigle, con una estructura combinatoria determinada como retículo, *espacio de clausura*, *familia intersectante*, *geometría convexa*, *matroide* o *greedoide*, entre otras.

Este trabajo de investigación se sitúa dentro de los estudios que intentan generalizar las situaciones de comunicación de Myerson. Esto implica que, dado un juego (N, v), se introduzca una familia de coaliciones factibles y, debido a ello, se modifique la función característica del juego (N, v) dando lugar al denominado *juego restringido por el sistema de coaliciones factibles*, el cual está definido para cualquier coalición $S \subseteq N$.

De ahí que, recogiendo resultados anteriores de esta línea de investigación, esta memoria intente avanzar con el objetivo fundamental de extender algunos resultados referentes a las situaciones de comunicación hacia estructuras más generales de cooperación parcial. En particular, se estudian estructuras de coaliciones factibles que son estables para la unión de dos coaliciones factibles que tengan intersección no vacía y, de manera especial, se hace hincapié en la axiomatización del *valor de Myerson* y del *valor de posición*. Esto, junto con el análisis de los trabajos de Owen, Borm, van den Nouweland y Tijs, entre otros, desembocará en la utilización de espacios de clausura, geometrías convexas y técnicas de análisis combinatorio para llegar a una generalización de las ideas expuestas anteriormente.

1.4 Sumario

En el segundo capítulo, se consideran juegos restringidos por un sistema de coaliciones factibles. Así, se presentan, en primer lugar, aquellos tipos de estructuras que van a considerarse a lo largo de la memoria, se indican algunas de sus características básicas y se definen los correspondientes conceptos de juego restringido estableciendo, en lo posible, una relación entre ellos. En segundo lugar, teniendo en cuenta que, en el modelo de cooperación parcial que se está considerando, el juego restringido supone una modificación de la función característica, es lógico que se intente estudiar aquellas propiedades que posee el juego (N, v) y que se transfieren al correspondiente juego restringido. En particular, se generaliza la transmisión de la superaditividad y el carácter simple y propio del juego (N, v) al juego restringido y, utilizando condiciones dadas por Faigle sobre familias de coaliciones factibles intersectantes, se establecen hipótesis que implican condiciones suficientes para que el juego restringido sea convexo cuando lo sea el juego (N, v), extendiéndose el resultado a una unión finita de familias intersectantes y disjuntas dos a dos.

También, es natural que se intenten establecer conexiones entre los conjuntos de solución correspondientes al juego (N, v) y al juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ o

$\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, siendo $v^{\mathcal{F}}$ y $\tilde{v}^{\mathcal{F}}$ las funciones características asociadas a los juegos restringidos derivados de un *sistema estable para la unión* y un *sistema unitario* respectivamente. En este sentido, se estudia la relación existente entre los cores de los juegos (N, v) y $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ así como de los juegos (N, v) y $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, estableciéndose una relación de inclusión entre ambos bajo las hipótesis adicionales que garanticen que el conjunto de imputaciones de ambos juegos sean coincidentes. Además, se puede asegurar que el juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado o totalmente equilibrado si también lo es el juego (N, v) y que el core del correspondiente juego restringido queda determinado por las coaliciones factibles. Por último, se estudian las condiciones bajo las que se mantiene la relación de dominancia entre imputaciones y, por tanto, la estabilidad interna y externa de un subconjunto del conjunto de las imputaciones $I(v)$. Utilizando resultados anteriores referentes a la transmisión de propiedades del juego (N, v) al juego restringido, se establecen condiciones suficientes para que $C(\tilde{v}^{\mathcal{F}})$ y $C(v^{\mathcal{F}})$ sean los únicos conjuntos estables en los respectivos juegos restringidos.

El concepto de *valor de Myerson generalizado* se introduce en el tercer capítulo. La definición no incorpora dificultad alguna, ya que se basa en el valor de Shapley del correspondiente juego restringido por el sistema de coaliciones factibles. Sin embargo, la generalización de la axiomatización clásica del valor de Myerson —eficiencia en las componentes conexas del grafo que modela las relaciones bilaterales entre los jugadores, justicia y estabilidad— se ve dificultada por la necesidad de conocer cuál es el concepto matemático que desempeña un papel semejante al de las aristas de un grafo y por la necesidad de estudiar las propiedades de las coaliciones factibles maximales de cualquier coalición.

Lo expuesto hace que se haga un desarrollo exhaustivo de las propiedades de las $\mathcal{F}$*-componentes* de cualquier coalición $S \subseteq N$ y se introduzcan los conceptos de *soporte* y de *base* de un sistema de coaliciones factibles que sea estable para la unión de coaliciones factibles no disjuntas. Dentro de los resultados que se exponen, es importante destacar la unicidad de la base y el comportamiento de algunas subfamilias de coaliciones factibles como conjuntos cerrados en un espacio de clausura y en una geometría convexa. La existencia de una única base para cada sistema de coaliciones factibles estable para la unión permitirá establecer que existe una estrecha relación entre los sistemas de coaliciones que se están considerando y las denominadas *estructuras de conferencias* de Myerson definidas en su trabajo *Conference structures and fair allocation rules* (1980).

Una vez realizado el estudio citado en el párrafo anterior, se introducen los conceptos de *regla de asignación* en el conjunto de los sistemas de coaliciones factibles que son estables para la unión, de *regla de asignación justa* y de *regla de asignación estable*, demostrándose que el valor de Myerson $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la única regla de asignación justa sobre el conjunto de todas las estructuras de cooperación $(N, v, \mathcal{F})$, en donde (N, v) es un juego cooperativo de utilidad transferible y $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones factibles que es estable para la unión de coaliciones factibles que tengan intersección no vacía. Además, se prueba que si el juego (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces el valor de Myerson generalizado es una regla de asignación estable en SE^N. Se demuestra también que el valor de Myerson verifica la fórmula de Shapley

$$\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{S \subseteq N} \gamma(S) \left[\sum_{j \in N} \mu_j\left(N, v, \mathcal{F}_S\right) - \sum_{j \in N} \mu_j\left(N, v, \mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}\right) \right],$$

y se dan condiciones suficientes que aseguran cuándo el valor de Myerson generalizado es un vector del core correspondiente al *$\mathcal{F}$-juego restringido*.

El capítulo cuarto se dedica al *valor de posición generalizado*. En primer lugar, se define el *juego de conferencias* $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ sobre conjuntos de soportes no unitarios (de cardinal mayor o igual a dos) correspondientes al sistema de coaliciones factibles que se esté considerando y se hace notar que este juego de conferencias, supone una generalización del concepto de juego arco introducido por Borm, Owen y Tijs, en 1992, para situaciones de comunicación.

De forma inmediata, se define el valor de posición generalizado y se inicia un estudio de sus propiedades y características con el fin de intentar conseguir una axiomatización del mismo. Se demuestra que es eficiente respecto a las coaliciones factibles maximales de la coalición N y que no es una regla de asignación justa ni estable. Estas dos últimas características tendrán una influencia importante en la comparación con el concepto de valor de posición establecido por van den Nouweland, Borm y Tijs, en 1992, para *hipergrafos de comunicación*.

También se demuestra que es una regla de asignación aditiva y que satisface las propiedades del *soporte superfluo* y la propiedad de *influencia*. Estas propiedades, junto con la eficiencia en las $\mathcal{F}$-componentes de N del valor de posición, no permiten una axiomatización del mismo en el conjunto SE^N. Sin embargo, puede lograrse una caracterización axiomática del valor de posición para aquellas estructuras de cooperación estables para la unión, donde el sistema de coaliciones factibles $(N, \mathcal{F})$ verifica dos condiciones adicionales:

1.- Para cualesquiera $S, T \in \mathcal{F}$, con $|S \cap T| \geq 2$, se tiene que $S \cap T \in \mathcal{F}$.

2.- Toda coalición factible no unitaria se expresa de forma única como unión de soportes no unitarios.

Además, se relaciona este concepto con el valor de posición para hipergrafos de comunicación y con la caracterización axiomática dada por Faigle para el valor de posición definido sobre *juegos de comunicación general*.

Dado que el valor de posición satisface propiedades que no han sido contempladas para el valor generalizado de Myerson, parece oportuno estudiar si éste las verifica y si éstas podrían dar lugar a otras axiomatizaciones del valor de Myerson. Así, se prueba que el valor de Myerson generalizado satisface la propiedad del soporte superfluo y que no tiene la propiedad de influencia. No obstante, inspiradas en las anteriores y en estudios análogos de van den Nouweland para situaciones de comunicación, se introducen las propiedades *anónima* para los jugadores, del *jugador superfluo* y la *propiedad fuerte* *del soporte superfluo*, que permiten nuevas caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson generalizado en el conjunto SE^N.

Las características de linealidad del valor de Myerson y del valor de posición generalizado hacen que los dividendos del juego restringido por el sistema de coaliciones factibles y del juego de conferencias sean determinantes para el cómputo efectivo de ambos valores. De ahí, que se recojan, en diferentes secciones de los capítulos tercero y cuarto, resultados referentes al cálculo de dividendos. De forma especial y utilizando la fórmula de inversión de Möbius, se pone de manifiesto que los dividendos del juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ pueden expresarse en función de los dividendos del juego (N, v) siempre que se consideren determinados sistemas de coaliciones factibles estables para la unión. De igual forma se hace para los dividendos del juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, demostrándose que se pueden determinar en relación con la función característica del juego (N, v).

Por otra parte, con la intención de calcular más fácilmente el valor de Myerson y el valor de posición generalizado correspondiente a un determinado jugador, se demuestra que, para ello, es suficiente considerar la componente factible maximal de la coalición N a la que pertenezca el jugador.

El capítulo quinto se dedica a establecer una relación entre los juegos $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, a completar el estudio de aquellas propiedades que se heredan del juego (N, v) y a analizar también la transmisión de propiedades entre ellos. En particular, se estudia la transferencia de la superaditividad, el carácter equilibrado y la convexidad entre el juego de conferencias $(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}})$ y el juego restringido $(N, v^{\mathcal{F}})$, demostrándose que es suficiente que el juego de conferencias sea no negativo —junto con la superaditividad, el carácter equilibrado o la convexidad— para que la función característica del juego restringido tenga la misma propiedad, y comprobándose que lo recíproco no es cierto.

Finalmente, se analiza la relación de convexidad entre el juego (N, v) y el juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ dándose condiciones bajo las que la convexidad del juego (N, v)

es heredada por el juego de conferencias. Para ello, será necesario generalizar un resultado establecido por Shapley en 1971 en el que se proporciona una nueva caracterización de la convexidad de un juego cooperativo de utilidad transferible. Los resultados precedentes, permitirán indicar cuándo puede asegurarse que el valor de posición generalizado pertenece al core del juego restringido ya que, de forma general, sólo puede afirmarse que éste pertenece al conjunto de preimputaciones del correspondiente juego restringido.

Capítulo 2

Juegos restringidos y conjuntos solución

En este capítulo, se introducen los diferentes tipos de estructuras de coaliciones factibles que van a ser relevantes en este trabajo de investigación. De igual forma, dado un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v), se definen los diferentes conceptos de *juegos restringidos* por los sistemas de coaliciones factibles que van a considerarse y, teniendo en cuenta que se está en un contexto determinado de cooperación parcial —el cual implica una modificación de la función característica del juego (N, v), debido a la existencia de coaliciones que no son factibles—, se intentan establecer, cuando sea posible, relaciones entre el juego (N, v) y el correspondiente juego restringido por la cooperación parcial.

Posteriormente, se analizan algunos conceptos de solución que asocian a cada juego un conjunto de vectores de pago eficientes. En particular, se estudia la conexión entre el core del juego (N, v) y el core de los juegos restringidos por un *sistema unitario* y un *sistema estable para la unión*, así como la transmisión del carácter equilibrado del juego. También, se tratará de relacionar la dominancia en el juego (N, v) con la dominancia en los juegos $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, de forma que el conocimiento de cierta dominancia entre imputaciones, cuando hay cooperación total, permita conocer si esa dominancia se mantendría al imponer ciertas restricciones a la cooperación. De igual manera se plantea el problema inverso.

2.1 Juegos definidos en sistemas de conjuntos

Se ha justificado la necesidad de estudiar modelos más generales en los que se tengan en cuenta las posibles restricciones a la cooperación entre los jugadores. Aquí se analizarán estructuras de coaliciones factibles que ya tienen algún antecedente en otros trabajos de cooperación parcial y/o tienen, además, una interpretación lógica y real en el campo de la cooperación.

2.1.1 Sistemas unitarios

En primer lugar, se considerarán familias de conjuntos en las que el conjunto vacío y las coaliciones individuales sean coaliciones factibles.

Definición 2.1 *Un sistema unitario es un par* $(N, \mathcal{F})$*, con* $\mathcal{F} \subseteq 2^N$*, que satisface el siguiente axioma:*

(A1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ *y el conjunto* $\{i\} \in \mathcal{F}$*, para todo* $i \in N$*.*

En un sistema unitario, cualquier coalición $S \subseteq N$ puede expresarse como unión disjunta de coaliciones factibles ya que

$$S = \bigcup_{i \in S} \{i\}.$$

Ahora bien, esta partición de S en coaliciones factibles no tiene porqué ser única. En general, dado $S \subseteq N$ se denotará por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, al conjunto formado por todas las particiones de S en coaliciones factibles no vacías, entendiéndose que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Definición 2.2 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema unitario y (N, v) un juego de utilidad transferible. Se denomina juego con cooperación restringida por el sistema unitario $(N, \mathcal{F})$, al par $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ con*

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max \left\{ \sum_{i \in I} v(T_i) : \{T_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\}.$$

La definición dada de juego de cooperación restringida por un sistema unitario es una extensión, a cualquier coalición de jugadores, de la utilizada por Faigle [28] en el estudio de juegos con cooperación restringida y por Bergantiños, Carreras y García-Jurado [6] cuando consideran grafos de comunicación para reflejar situaciones de incompatibilidad entre algunos jugadores.

Es inmediato observar que, para cada $S \subseteq N$, se verifica

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

Además, el juego así definido es siempre superaditivo. Un estudio completo de las propiedades que se transmiten del juego (N, v) al juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ puede encontrarse en [46].

2.1.2 Sistemas estables para la unión

En esta subsección se va a considerar la cooperación parcial originada por un conjunto de coaliciones factibles con la siguiente propiedad: siempre que dos coaliciones factibles tengan una intersección no vacía, la unión de ambas es una coalición factible. Estas estructuras de coaliciones, se denominarán $\cup$-*estables* y tienen una interpretación lógica dentro de la cooperación parcial ya que, si dos coaliciones factibles tienen elementos comunes, éstos pueden ejercer de intermediarios entre ambas para formar una coalición factible más amplia, constituida por el grupo total. Un caso particular de familias de coaliciones factibles $\cup$-estables lo constituyen las situaciones de comunicación.

Definición 2.3 *Un sistema $\cup$-estable o estable para la unión es un par $(N, \mathcal{F})$, con $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, verificando que*

$$A, B \in \mathcal{F}, \;\; A \cap B \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo 2.4 *Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, para algún número natural n y considérese la colección $\mathcal{L}_n$, constituida por el conjunto vacío y todos los conjuntos de la forma $[i, j] = \{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$, para $1 \leq i \leq j \leq n$. En este modelo, que corresponde a una situación de votación en un orden político unidimensional estudiada por Edelman [27] y que tiene un antecedente en el policy order de Axelrod [4], el par $(N, \mathcal{L}_n)$ es un sistema $\cup$-estable.*

Ejemplo 2.5 *Una situación de comunicación es una terna (N, v, E), donde (N, v) es un juego y (N, E) es un grafo. En el contexto de las situaciones de comunicación, introducidas por Myerson [53] e investigadas por Owen [61], Borm, Owen y Tijs [17], y Borm, van den Nouweland, Owen y Tijs [18], el par $(N, \mathcal{F})$, donde*

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } (N, E)\},$$

es un sistema $\cup$-estable.

Es importante resaltar que, dado un sistema $\cup$-estable, éste no siempre puede ser modelado mediante un grafo de comunicación. En efecto, considérese el par $(N, \mathcal{F})$, donde $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y la familia

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, N\}.$$

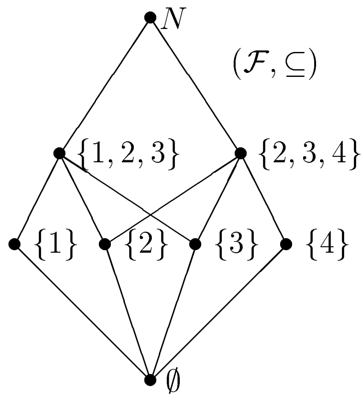

FIGURA 2.1

Puede comprobarse que $(N, \mathcal{F})$ constituye un sistema estable para la unión que no coincide con la familia de subgrafos conexos de ningún grafo. Esto es debido a que cualquier grafo (N, E) se define mediante parejas $\{i, j\}$, lo cual implica que deben existir forzosamente coaliciones factibles formadas por dos elementos y esta propiedad no se verifica para la familia de coaliciones $\mathcal{F}$ considerada.

Ejemplo 2.6 *Sea* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y considérense los sistemas de coaliciones* $(N, \mathcal{F}_1)$ *y* $(N, \mathcal{F}_2)$ *dados por*

$$\mathcal{F}_1 = \{\{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, N\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, N\}.$$

A través de la representación de $(\mathcal{F}_1, \subseteq)$ y $(\mathcal{F}_2, \subseteq)$ puede examinarse fácilmente si los sistemas son $\cup$-estables. Así, $(N, \mathcal{F}_1)$ constituye un sistema $\cup$-estable ya que, como puede comprobarse (ver diagramas de la Figura 2.2), siempre que dos coaliciones factibles tienen intersección no vacía, su unión es una coalición factible. El par $(N, \mathcal{F}_2)$ no es un sistema $\cup$-estable puesto que, por ejemplo

$$\{1,2\}, \{1,3\} \in \mathcal{F}_2, \text{ verifican } \{1,2\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset,$$

y, sin embargo,

$$\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{F}_2.$$

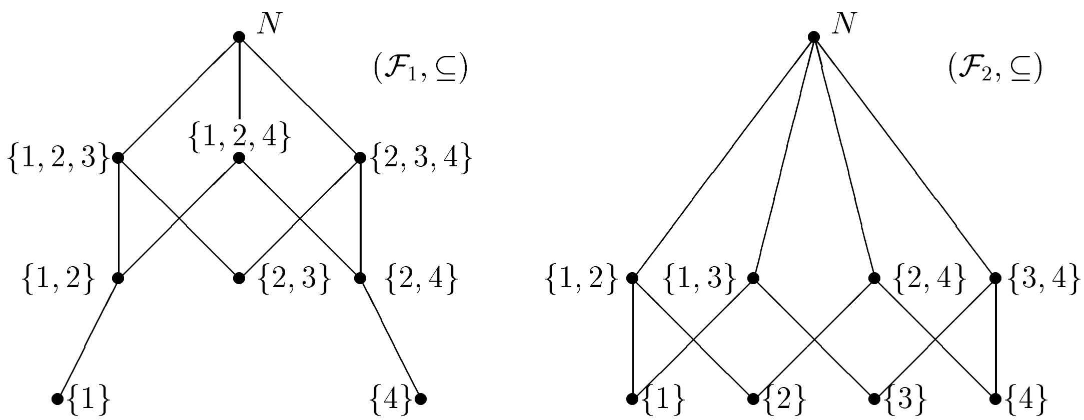

FIGURA 2.2

Definición 2.7 *Sean $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ y $S \subseteq N$. Se dice que $T \subseteq S$ es una $\mathcal{F}$-componente de S si $T \in \mathcal{F}$ y no existe $T' \in \mathcal{F}$ tal que $T \subset T' \subseteq S$.*

Es decir, las $\mathcal{F}$-componentes de S son las coaliciones factibles maximales pertenecientes a $\mathcal{F}$ y contenidas en S.

En adelante, para toda $S \subseteq N$, se denotará por $C_{\mathcal{F}}(S)$ al conjunto de coaliciones factibles maximales de S en $(N, \mathcal{F})$; es decir,

$$S \longmapsto C_{\mathcal{F}}(S) = \{T : T \text{ es } \mathcal{F}\text{-componente de } S\} \subseteq 2^S.$$

Obsérvese que el conjunto $C_{\mathcal{F}}(S)$ puede ser vacío. Esto significa que no existe ninguna coalición factible contenida en S y, este hecho, tendrá connotaciones a la hora de introducir el juego restringido por la cooperación parcial definida por la familia $\mathcal{F}$.

En el Ejemplo 2.5 se ha puesto de manifiesto que, dada una situación de comunicación (N, v, E), el par $(N, \mathcal{F})$, donde

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } (N, E)\},$$

es un sistema de coaliciones factibles $\cup$-estable. En este caso, las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición $S \subseteq N$ son las componentes conexas del subgrafo $(S, E(S))$ y constituyen una partición de S.

El siguiente resultado da una caracterización de un sistema estable para la unión en relación con las coaliciones factibles maximales.

Proposición 2.8 *Sea el par $(N, \mathcal{F})$ con $\mathcal{F} \subseteq 2^N$. Entonces, $(N, \mathcal{F})$ es $\cup$-estable si y sólo si, para cualquier $S \subseteq N$ tal que $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$, las $\mathcal{F}$-componentes de S constituyen una partición de un subconjunto de S.*

Demostración: Sean $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_k\}_{k \in K}$. Considérense S_i, $S_j \in C_{\mathcal{F}}(S)$, $i \neq j$. Si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, entonces $S_i \cup S_j \in \mathcal{F}$ y $S_i \cup S_j \subseteq S$. Ello contradice que S_i y S_j sean $\mathcal{F}$-componentes de S. Es evidente, por definición de $\mathcal{F}$-componentes de S, que $\bigcup_{k \in K} S_k \subseteq S$.

Recíprocamente, supóngase que para cualquier S tal que $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$, sus $\mathcal{F}$-componentes forman una partición de un subconjunto de S. Si se razona por reducción al absurdo, admitiendo que $(N, \mathcal{F})$ no es $\cup$-estable, ello implica la existencia de coaliciones $A, B \in \mathcal{F}$, con $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cup B \notin \mathcal{F}$. De aquí, debe existir $C_1 \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)$, con $A \subseteq C_1$ y $C_2 \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)$, con $B \subseteq C_2$ tal que $C_1 \neq C_2$. Esto, contradice el hecho de que las $\mathcal{F}$-componentes del conjunto $A \cup B$ son disjuntas. $\square$

De la proposición se desprende que las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición S, $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_k\}_{k \in K}$, forman una partición del conjunto $\bigcup_{k \in K} S_k$. Obsérvese que si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema $\cup$-estable, que además es un sistema unitario, entonces se verifica que, para todo $S \subseteq N$, el conjunto de las $\mathcal{F}$-componentes de S forman una partición de S y es siempre distinto del vacío.

También, puede notarse que la definición de $\mathcal{F}$-componente es válida para sistemas unitarios. En este caso, para cualquier $S \subseteq N$, las $\mathcal{F}$-componentes de S constituyen una colección $\{T_k\}_{k\in K} \subseteq 2^S$ tal que

$$S = \bigcup_{k\in K} T_k.$$

Ahora bien, las $\mathcal{F}$-componentes de S no forman necesariamente una partición de S. La Proposición 2.8 asegura que si el sistema $(N, \mathcal{F})$ no es estable para la unión, entonces las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición $S \subseteq N$, no tienen porqué constituir una partición de la coalición S.

Teorema 2.9 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario y (N, v) un juego superaditivo. Sea $S \subseteq N$ tal que las $\mathcal{F}$-componentes de S forman una partición de la misma, entonces el juego de cooperación restringida $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ verifica*

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k\in K} v(T_k),$$

siendo $\{T_k\}_{k\in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ la partición de S en sus $\mathcal{F}$-componentes.

Demostración: Sea $S \subseteq N$. Por definición

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max\left\{\sum_{i\in I} v(S_i) : \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\}.$$

Por hipótesis, las $\mathcal{F}$-componentes, $\{T_k\}_{k\in K}$, de S forman una partición de S. De ahí, teniendo en cuenta que son coaliciones factibles maximales en S, resulta que cada $S_j \in \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ está contenida en una y sólo una $\mathcal{F}$-componente de S. Esta relación no tiene porqué ser inyectiva aunque es sobreyectiva. Así, si se denota por $\{S_1^k, S_2^k, \ldots, S_p^k\}$ a aquellas coaliciones factibles de la partición $\{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ tal que $S_j^k \subseteq T_k$, con $1 \leq j \leq p$, entonces

$$\bigcup_{j=1}^{p} S_j^k = T_k,$$

ya que, obviamente, $\bigcup_{j=1}^{p} S_j^k \subseteq T_k$ y, si existiera un elemento $a \in T_k$ tal que $a \notin \bigcup_{j=1}^{p} S_j^k$ resultaría que

$$a \in T_k \subseteq S \implies a \in S_t,\ S_t \neq S_j^k \implies a \in S_t \subseteq T_h,\ h \neq k,$$

con lo que $a \in T_k \cap T_h$, lo cual contradice el hecho de ser $\{T_k\}_{k\in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$.

El razonamiento anterior implica que

$$\sum_{j=1}^{p} v(S_j^k) \leq v\left(\bigcup_{j=1}^{p} S_j^k\right) = v(T_k),$$

por ser (N, v) superaditivo. Por tanto, reagrupando todas aquellas coaliciones $S_j \in \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ que estén incluidas en una misma $\mathcal{F}$-componente y aplicando el carácter superaditivo del juego (N, v), se tiene que

$$\sum_{i\in I} v(S_i) \leq \sum_{k\in K} v(T_k), \text{ para cada } \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S),$$

con lo que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k\in K} v(T_k)$. □

Una *estructura de cooperación estable para la unión* es una terna $(N, v, \mathcal{F})$ donde (N, v) es un juego cooperativo de utilidad transferible y el par $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones estable para la unión.

Definición 2.10 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Se denomina $\mathcal{F}$-juego restringido al par $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, con*

$$v^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} \sum\limits_{T\in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) & si\ C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.5, puede observarse que la definición anterior constituye una generalización del concepto de juego restringido por un grafo de comunicación dado por Myerson (1977) [53].

Dos clases especiales de sistemas de coaliciones que son estables para la unión, lo constituyen los sistemas de partición [46], [9] y las familias intersectantes [33].

Definición 2.11 *Un sistema de partición es un par $(N, \mathcal{F})$, con $\mathcal{F} \subseteq 2^N$, que satisface los siguientes axiomas:*

(A1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ y el conjunto $\{i\} \in \mathcal{F}$, para todo $i \in N$.

(A2) Para toda $S \subseteq N$, los subconjuntos maximales de S en $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$-componentes de S) forman una partición de S, denotada por

$$\Pi_S = \{S_1, \ldots, S_k\}.$$

Es inmediato que la Proposición 2.8 permite garantizar que un sistema unitario es un sistema de partición si y sólo si es estable para la unión y, obviamente, los pares $(N, \mathcal{F})$ donde $N = \{1, 2 \ldots, n\}$,

$$\mathcal{F} = 2^N \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \ldots, \{n\}\},$$

son los sistemas de partición máximo y mínimo.

El par $(N, \mathcal{L}_n)$ considerado en el Ejemplo 2.4 y el par $(N, \mathcal{F})$ del Ejemplo 2.5 son casos particulares de sistemas de partición.

El juego restringido por un sistema de partición, como caso especial de sistema de coaliciones $\cup$-estable, viene definido de igual forma. Además, puede observarse que si, en la terna $(N, v, \mathcal{F})$, el par $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición y el juego (N, v) es superaditivo, entonces coinciden las funciones características asociadas al juego con cooperación restringida por el sistema unitario y por el sistema de partición; es decir, $\tilde{v}^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$. No obstante, en general se verifica la desigualdad

$$v^{\mathcal{F}}(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S), \text{ para toda } S \subseteq N.$$

Si $(N, \mathcal{F})$ es el sistema de partición del Ejemplo 2.5 y (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces el correspondiente juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es denominado Γ-*component additive game* por Potters y Reijnierse [63] .

Otro caso especial de sistema de coaliciones estable para la unión, y que será importante en la transmisión de la convexidad, lo constituyen las *familias intersectantes*.

Una *familia intersectante* es un sistema de coaliciones estable para la unión, $(N, \mathcal{F})$, en el que se verifica, además, la siguiente condición:

$$\text{Si } S, T \in \mathcal{F}, \text{ con } S \cap T \neq \emptyset, \text{ entonces } S \cap T \in \mathcal{F}.$$

Se dirá que es *unitaria* si además, $(N, \mathcal{F})$, es un sistema unitario.

Se estudian, a continuación, algunas propiedades de la función característica asociada al juego restringido por un sistema $\cup$-estable y por un sistema de partición, intentando determinar qué propiedades del juego (N, v) se trasmiten al juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. De forma inmediata, puede establecerse que si $(N, v, \mathcal{F})$ es una estructura de cooperación estable para la unión se verifica:

(a) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$.

(b) Si v es cero-normalizado, también $v^{\mathcal{F}}$ lo es.

(c) $\left(v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}}$.

Previamente, con el objetivo de establecer condiciones bajo las que se transfiere la superaditividad del juego (N, v) al juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, se expone el siguiente resultado.

Proposición 2.12 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Sean $A, B \subset N$ dos coaliciones disjuntas. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ son las respectivas $\mathcal{F}$-componentes,* *entonces las coaliciones factibles maximales de* $A \cup B$ *son* $\Pi_{(A\cup B)} = \{C_l\}_{l\in L}$*, siendo*

$$C_l = \left(\bigcup_{i\in I'} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J'} B_j\right),\ \textit{con}\ I' \subseteq I,\ J' \subseteq J,\ I', J' \neq \emptyset$$

o bien $C_l = A_k$ *o* $C_l = B_p$*, para ciertos* $k \in I$*,* $p \in J$*.*

Demostración: Sea $A_i \in \Pi_A$ (el razonamiento es similar con $B_j \in \Pi_B$). Ello quiere decir que $A_i \in \mathcal{F}$ y que es una coalición factible maximal en A. Puede que, además, sea maximal en $A \cup B$ con lo que $A_i \in \Pi_{(A\cup B)}$. Si no lo es, significa que al conjunto A_i se han de añadir ciertos elementos (N es finito) que lo convierten en una coalición factible maximal de la unión y dichos elementos, no pueden ser exclusivamente pertenecientes a A ya que A_i es maximal en A. Sea, entonces, $A_i \cup \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F}$ siendo $\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq A \setminus A_i$ y $\{b_1, \ldots, b_h\} \subseteq B$ ($A \cap B = \emptyset$). Como $a_1 \in A \setminus A_i$, puede admitirse, sin pérdida de generalidad, que $a_1 \in A_1$ ($A_i \neq A_1$) lo que implica, teniendo en cuenta que es un sistema de partición y por tanto estable para la unión, que

$$\left.\begin{array}{c} A_i \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F} \\ a_1 \in A_1,\ A_1 \in \mathcal{F} \\ (A_i \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\}) \cap A_1 \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$A_i \cup A_1 \cup \{a_2, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_h\} \in \mathcal{F}.$$

Razonando, de igual forma, con los demás elementos se llega a que una coalición factible maximal de la unión estaría formada por

$$C_l = \left(\bigcup_{i\in I'} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J'} B_j\right), \text{ con } I' \subseteq I,\ J' \subseteq J,\ I', J' \neq \emptyset.$$

□

En el siguiente ejemplo, se pone de manifiesto que la proposición anterior no es cierta, en general, para sistemas estables para la unión. En ello, es determinante que las coaliciones unitarias no son, necesariamente, coaliciones factibles.

Ejemplo 2.13 *Sea* $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *y considérese, en primer lugar, el sistema* $\cup$*-estable* $(N, \mathcal{F})$*, con* $\mathcal{F} = \{\{4,5\}, \{6,7\}, \{1,2,3\}\}$*. Si se toman las coaliciones* $A = \{1,2,4,5\}$ *y* $B = \{3,6,7\}$*, se tiene que*

$$C_{\mathcal{F}}(A) = \{\{4,5\}\},\ C_{\mathcal{F}}(B) = \{\{6,7\}\},$$

y, sin embargo, $C_{\mathcal{F}}(A \cup B) = \{\{4,5\}, \{6,7\}, \{1,2,3\}\}$*.*

En segundo lugar, si se considera, ahora, el sistema $\cup$*-estable* $(N, \mathcal{F})$ *con*

$$\mathcal{F} = \{\{4,5\}, \{6,7\}, \{1,2,3,4,5\}\},$$

se verifica que, para las mismas coaliciones A *y* B *indicadas anteriormente,*

$$C_{\mathcal{F}}(A) = \{\{4,5\}\},\ C_{\mathcal{F}}(B) = \{\{6,7\}\},$$

y, $C_{\mathcal{F}}(A \cup B) = \{\{1,2,3,4,5\}, \{6,7\}\}$*.*

Por último, dado el sistema $\cup$*-estable* $(N, \mathcal{F})$ *con* $N = \{1,2,3,4,5\}$ *y*

$$\mathcal{F} = \{\{1,2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\},$$

obsérvese que si $A = \{1,2\}$ *y* $B = \{3,4\}$*, entonces* $C_{\mathcal{F}}(A) = C_{\mathcal{F}}(B) = \emptyset$*, mientras que* $C_{\mathcal{F}}(A \cup B) = A \cup B$*.*

Teorema 2.14 *Sea la terna* $(N, v, \mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión. Si* (N, v) *es superaditivo y cero-normalizado, entonces*

(a) $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$*, para toda* $S \subseteq N$*.*

(b) $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ *es superaditivo.*

Demostración: (a) Sea $S \subseteq N$. Si $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$, es inmediato. Supóngase que $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.8, las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición S, $\{S_k\}_{k \in K}$, forman una partición de un subconjunto de S. Entonces,

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k \in K} v(S_k) \leq v\left(\bigcup_{k \in K} S_k\right) \leq v(S),$$

ya que (N, v) es superaditivo y, por ser cero-normalizado, monótono.

(b) Sean las coaliciones A, $B \subset N$, con $A \cap B = \emptyset$. Si $C_{\mathcal{F}}(A) = \{A_i\}_{i \in I}$ y $C_{\mathcal{F}}(B) = \{B_j\}_{j \in J}$, resulta que toda coalición factible maximal de A y de B verifica una, y sólo una, de las dos siguientes condiciones: o es una $\mathcal{F}$-componente de $A \cup B$ o está contenida estrictamente en una coalición factible maximal de $A \cup B$. Entonces, si se considera el conjunto $C'_{\mathcal{F}}(A \cup B)$ definido por

$$\{S \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B) : \exists A_i \in C_{\mathcal{F}}(A) \text{ con } A_i \subset S \text{ o } \exists B_j \in C_{\mathcal{F}}(B) \text{ con } B_j \subset S\},$$

se clasifican las coaliciones factibles maximales de A y B según sean o no $\mathcal{F}$-componentes de la unión, y reagrupando aquellas coaliciones factibles maximales de A y B que estén contenidas en una misma $S \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)$, se tiene

$$\begin{aligned}
v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) &= \sum_{A_i \in C_{\mathcal{F}}(A)} v(A_i) + \sum_{B_j \in C_{\mathcal{F}}(B)} v(B_j) \\
&= \sum_{A_i \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)} v(A_i) + \sum_{B_j \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)} v(B_j) \\
&+ \sum_{S \in C'_{\mathcal{F}}(A \cup B)} \left[\sum_{A_i \subset S} v(A_i) + \sum_{B_j \subset S} v(B_j)\right] \\
&\leq \sum_{A_i \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)} v(A_i) + \sum_{B_j \in C_{\mathcal{F}}(A \cup B)} v(B_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{S\in C'_{\mathcal{F}}(A\cup B)} v(S) \\ &\leq \sum_{S\in C_{\mathcal{F}}(A\cup B)} v(S) = v^{\mathcal{F}}(A\cup B), \end{aligned}$$

ya que $A\cap B=\emptyset$, las $\mathcal{F}$-componentes son siempre disjuntas entre sí, v es superaditivo y, por ser cero-normalizado, monótono.

Obviamente, si $C_{\mathcal{F}}(A)=\emptyset$ o bien $C_{\mathcal{F}}(B)=\emptyset$, puede hacerse un razonamiento análogo. □

Obsérvese que en el caso particular de que todas las coaliciones unitarias sean factibles, puede suprimirse la hipótesis de que el juego (N,v) sea cero-normalizado.

Teorema 2.15 *Sea la terna $(N,v,\mathcal{F})$, con $(N,\mathcal{F})$ un sistema de partición. Si (N,v) es superaditivo, entonces*

(a) $v^{\mathcal{F}}(S)\leq v(S)$ para toda $S\subseteq N$.

(b) $\left(N,v^{\mathcal{F}}\right)$ es superaditivo.

Demostración: La prueba de que $v^{\mathcal{F}}(S)\leq v(S)$, para todo $S\subseteq N$, es análoga a la del apartado (a) del teorema anterior. Únicamente conviene precisar aquí que, en este caso, las $\mathcal{F}$-componentes de S forman una partición de S y, por tanto, no es necesario que el juego sea cero-normalizado.

De igual forma, para la demostración del apartado (b) puede utilizarse un razonamiento bastante análogo a su homólogo en el teorema anterior. No obstante, la Proposición 2.12 lo simplifica ya que o bien algunas coaliciones factibles maximales de la unión, $\{C_l\}_{l\in L}$, coinciden con algunas de las de los conjuntos A, B, o bien son de la forma

$$C_l=\left(\bigcup_{i\in I'} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j\in J'} B_j\right), \text{ con } I'\subseteq I,\ J'\subseteq J,\ I',J'\neq\emptyset.$$

Reagrupando las $\mathcal{F}$-componentes de A y B, y aplicando el carácter superaditivo del juego (N, v), se tiene

$$v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B) = \sum_{i \in I} v(A_i) + \sum_{j \in J} v(B_j) \leq \sum_{l \in L} v(C_l) = v^{\mathcal{F}}(A \cup B).$$

$\square$

Teorema 2.16 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Si (N, v) es cero-normalizado, simple y propio, entonces*

(a) $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ *es simple y propio.*

(b) $v^{\mathcal{F}}(S) = \max\{v(S_i) : S_i \in C_{\mathcal{F}}(S)\}$, *para cada* $S \subseteq N$.

Demostración: (a) Sea $S \subseteq N$. Debido al apartado (a) del Teorema 2.14, $v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$. Luego, al ser $v(S) \in \{0, 1\}$, resulta que $v^{\mathcal{F}}(S) \leq 1$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k \in K} v(T_k)$ siendo $v(T_k) \in \{0, 1\}$, se tiene que $v^{\mathcal{F}}(S) \in \{0, 1\}$. Además, si $A \subseteq B \subseteq N$, el apartado (b) del Teorema 2.14 implica que

$$v^{\mathcal{F}}(B) \geq v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B \setminus A) \geq v^{\mathcal{F}}(A)$$

con lo que $v^{\mathcal{F}}$ es monótono. Por último, por ser $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ superaditivo, es propio.

(b) Es inmediato. $\square$

Lógicamente, el Teorema 2.15 permite que el resultado anterior pueda formularse, para sistemas de partición, de la siguiente forma.

Teorema 2.17 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Si (N, v) es simple y propio, entonces*

(a) $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ *es simple y propio.*

(b) $v^{\mathcal{F}}(S) = \max\{v(S_i) : S_i \in \Pi_S\}$, *para cada* $S \subseteq N$.

La monotonía del juego (N, v) no se transmite al juego $v^{\mathcal{F}}$ a no ser que (N, v) sea también superaditivo y cero-normalizado. No obstante, puede darse una condición local: supóngase que $A \subseteq B$ y $C_{\mathcal{F}}(A) = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $C_{\mathcal{F}}(B) = \{B_1, \ldots, B_p\}$; entonces para cada $A_i \in C_{\mathcal{F}}(A)$ existe una única $B_j \in C_{\mathcal{F}}(B)$ tal que $A_i \subseteq B_j$. Si esta relación establecida entre las coaliciones factibles maximales de A y B es una-a-una (es decir, dos componentes diferentes de A están contenidas en diferentes componentes de B) y (N, v) es un juego monótono y cero-normalizado, entonces $v^{\mathcal{F}}(A) \leq v^{\mathcal{F}}(B)$ ya que

$$v^{\mathcal{F}}(A) = \sum_{i=1}^{k} v(A_i) \leq \sum_{\{B_j : A_i \subseteq B_j\}} v(B_j) \leq \sum_{j=1}^{p} v(B_j) = v^{\mathcal{F}}(B).$$

En resultados anteriores se ha mostrado que si (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces el juego restringido por un sistema $\cup$-estable $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ también lo es. Sin embargo, bajo hipótesis análogas, la convexidad no es transmitida, de forma general, al correspondiente juego restringido por un sistema estable para la unión. Un ejemplo bien conocido puede encontrarse en [57]. Para estudiar las condiciones estructurales que tendrían que cumplirse para que se transmitiera la convexidad, se introducen los siguientes conceptos.

Faigle [28] considera una terna $(N, v, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es un conjunto de coaliciones de N (no exige que $\emptyset \in \mathcal{F}$, ni que $\{i\} \in \mathcal{F}$, para todo $i \in N$, con lo que $(N, \mathcal{F})$ no es necesariamente un sistema unitario) y $v : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ un juego. Denomina $\tilde{\mathcal{F}}$ al conjunto de coaliciones de N que pueden expresarse como uniones disjuntas de elementos de $\mathcal{F}$. Es decir, si $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, entonces

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p,\ \ A_i \in \mathcal{F},\ \ i = 1, \ldots, p \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ con } \ i \neq j,$$

y define la función $\tilde{v} :\ \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{v}(A) = \max\left\{\sum_{i=1}^{p} v(A_i)\right\},$$

donde el máximo se toma cuando se recorren todas las posibles particiones de A en elementos de $\mathcal{F}$. Con estas ideas y condiciones, Faigle [28, Lema 11] demuestra que si $(N, \mathcal{F})$ es una familia intersectante y

$$v(A) + v(B) \leq v(A \cup B) + v(A \cap B),$$

para cualesquiera $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, con $A \cap B \neq \emptyset$, entonces

$$\tilde{v}(A) + \tilde{v}(B) \leq \tilde{v}(A \cup B) + \tilde{v}(A \cap B),$$

para $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, $B \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Proposición 2.18 *Sea $(N, \mathcal{F})$ una familia intersectante. Sean $A, B \subseteq N$ dos coaliciones no disjuntas. Si $C_{\mathcal{F}}(A) = \{A_i\}_{i \in I}$ y $C_{\mathcal{F}}(B) = \{B_j\}_{j \in J}$, entonces cada $\mathcal{F}$-componente del conjunto $A \cap B$ es de la forma $A_i \cap B_j$, para algún $i \in I$ y algún $j \in J$.*

Demostración: En primer lugar, por hipótesis si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, entonces $A_i \cap B_j \in \mathcal{F}$. Además, si $S \in \mathcal{F}$, $S \subseteq A \cap B$, se tiene que $S \subseteq A$, $S \subseteq B$ y, por tanto, $S \subseteq A_i$, $S \subseteq B_j$ para un único i y un único j. De ahí, toda coalición factible contenida en $A \cap B$, está incluida en una única coalición factible $A_i \cap B_j$. Ello determina que éstas son las coaliciones factibles maximales en la intersección. $\square$

Obsérvese que si $(N, \mathcal{F})$ es una familia $\cup$-estable, no necesariamente intersectante, se puede asegurar que cada $\mathcal{F}$-componente del conjunto intersección es una coalición factible maximal de un único conjunto de la forma $A_i \cap B_j$.

Proposición 2.19 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Si $S \subseteq N$ se puede expresar como una unión de coaliciones factibles, no necesariamente disjuntas entre sí, entonces las $\mathcal{F}$-componentes de S forman una partición de la misma.*

Demostración: Sea $S = \bigcup_{k \in K} S_k$, con $S_k \in \mathcal{F}$, para todo $k \in K$. Considérese $C_{\mathcal{F}}(S) = \{T_j\}_{j \in J}$. Es inmediato que

$$\bigcup_{j \in J} T_j \subseteq S.$$

Por otro lado, $x \in S = \bigcup_{k \in K} S_k$, implica que $x \in S_k$, para algún $k \in K$ y, de ahí, $x \in S_k \subseteq T_p$, con $T_p \in C_{\mathcal{F}}(S)$. Por tanto, $S \subseteq \bigcup_{j \in J} T_j$ y se verifica la igualdad. □

Nótese que el resultado anterior indica que toda coalición S que verifique la hipótesis de la proposición pertenece a $\tilde{\mathcal{F}}$.

Teorema 2.20 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ una familia intersectante y (N, v) un juego cero-normalizado. Si (N, v) es convexo, entonces $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ también lo es.*

Demostración: Habrá que demostrar que, para todo par de coaliciones $A, B \subseteq N$, se verifica

$$v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) \geq v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B).$$

Si $A \cap B = \emptyset$, es inmediato. En efecto, por hipótesis, (N, v) es convexo y, por tanto, superaditivo. Aplicando el Teorema 2.14, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es también superaditivo y

$$v^{\mathcal{F}}(A \cup B) \geq v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B).$$

Supóngase que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $C_{\mathcal{F}}(A) = \{A_i\}_{i \in I}$ y $C_{\mathcal{F}}(B) = \{B_j\}_{j \in J}$, aplicando que $A \supseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, $B \supseteq \bigcup_{j \in J} B_j$ y que $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es superaditivo, cero-normalizado y, por tanto, monótono, se tiene

$$v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) \geq v^{\mathcal{F}}\left(\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)\right) + v^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)\right).$$

Por otro lado, considérese la restricción de la función característica v a la familia $\mathcal{F}$ y, teniendo en cuenta los razonamientos previos, puede definirse

$$\tilde{v} : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{v}(S) = \max\left\{\sum_{i\in I} v(S_i) : \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\}.$$

Como (N, v) es convexo, es superaditivo. Así, por medio de los razonamientos contemplados en el Teorema 2.9, se deduce que, para toda coalición $S \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{v}(S) = v^{\mathcal{F}}(S)$, ya que, en este caso, las $\mathcal{F}$-componentes de S forman una partición de la misma según la Proposición 2.19.

Utilizando el resultado de Faigle [28, Lema 11], $\tilde{v}$ es supermodular y, de ahí, se tiene

$$\begin{aligned}
v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) \;\geq\;& v^{\mathcal{F}}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right) \\
&+ v^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)\right) \\
=\;& \tilde{v}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right) \\
&+ \tilde{v}\left(\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)\right) \\
=\;& \tilde{v}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right) \\
&+ \tilde{v}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\right) \\
\geq\;& \tilde{v}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) + \tilde{v}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
=\;& v^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) + v^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B).$$

En el razonamiento efectuado, se ha supuesto que los conjuntos $C_{\mathcal{F}}(A)$ y $C_{\mathcal{F}}(B)$ son no vacíos. Si alguno de ellos lo fuera, la Proposición 2.18 asegura que $C_{\mathcal{F}}(A \cap B) = \emptyset$ y, por tanto

$$v^{\mathcal{F}}(A \cup B) + v^{\mathcal{F}}(A \cap B) = v^{\mathcal{F}}(A \cup B) \geq v^{\mathcal{F}}(A) + v^{\mathcal{F}}(B).$$

□

El resultado anterior se verifica para familias intersectantes unitarias, sin exigir que el juego (N, v) sea cero-normalizado.

Teorema 2.21 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, siendo $(N, \mathcal{F})$ una familia intersectante unitaria. Si (N, v) es convexo, entonces $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ también lo es.*

Demostración: Es claro que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición. Por tanto, si $\mathcal{F}$ es el conjunto de coaliciones factibles, resulta que $\tilde{\mathcal{F}} = 2^N$.

Como (N, v) es convexo, entonces v es superaditivo. Así, es inmediato que $\tilde{v}(S) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S)$, para cada $S \subseteq N$.

Utilizando el resultado de Faigle, [28, Lema 11], $\tilde{v}$ es supermodular y, por tanto, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es convexo. □

El teorema anterior indica que los sistemas de partición que sean $\cap$-*estables* (cerrados para la intersección de dos cualesquiera de sus elementos no disjuntos) transmiten la convexidad de un determinado juego (N, v) al correspondiente juego restringido por la familia de coaliciones factibles considerada.

Además el Teorema 2.20 se verifica para una terna $(N, v, \mathcal{F})$ en la que $(N, \mathcal{F})$ es una unión finita disjunta de familias intersectantes y (N, v) es un juego cero-normalizado. Es decir,

$$N = N_1 \cup \ldots \cup N_t, \text{ con } N_i \cap N_j = \emptyset, \ i \neq j,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_t, \text{ con } \mathcal{F}_i \subseteq 2^{N_i}, \quad i = 1, \ldots, t,$$

y $(N, \mathcal{F}_i)$ es una familia intersectante.

Con estas premisas, es inmediato que $(N, \mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{t} (N_i, \mathcal{F}_i)$ es una familia intersectante. En efecto, si $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_i$, para un único i; de ahí $A \cap B \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ y $A \cup B \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$.

El razonamiento efectuado permite establecer la siguiente consecuencia.

Corolario 2.22 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, donde $(N, \mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{t} (N_i, \mathcal{F}_i)$ es una unión finita disjunta de familias intersectantes. Si (N, v) es un juego convexo y cero-normalizado entonces, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ también lo es.*

De forma análoga, el Teorema 2.21 puede aplicarse a una terna $(N, v, \mathcal{F})$ en la que $(N, \mathcal{F})$ es una unión finita disjunta de familias intersectantes unitarias y (N, v) es un juego convexo. Ello daría lugar, de forma similar a lo establecido en los Teoremas 2.15, 2.17 y 2.21, a un resultado semejante al indicado en el Corolario 2.22, eliminando de las hipótesis, el carácter cero-normalizado del juego.

2.1.3 Geometrías convexas

Las geometrías convexas constituyen una estructura de coaliciones factibles que, independientemente de ser un modelo diferente de cooperación parcial, aportan características fundamentales para la obtención de propiedades especiales de los $\mathcal{F}$-juegos restringidos.

Owen [61], analiza las notables simplificaciones que se producen en el cómputo del valor de Myerson cuando, considera situaciones de comunicación cuyo grafo tiene estructura de árbol. Posteriormente, las propiedades de estas singulares situaciones de comunicación, en las que el grafo que modela la cooperación parcial entre los jugadores es un árbol, han sido puestas de manifiesto en los trabajos de Borm, van den Nouweland, Owen y Tijs [18], que analizan problemas de asignación de costos y encuentran fórmulas integrales para el cálculo del valor de Myerson; de Grafe, Mauleón e Iñarra [32] en la búsqueda de un procedimiento para computar el nucleólo y en el estudio, realizado por Potters y Reijnierse [63], sobre el carácter equilibrado de los juegos restringidos por grafos de comunicación, el nucleólo, así como las relaciones entre el conjunto de negociación y el core. Estas propiedades se generalizan a sistemas de coaliciones que son geometrías convexas, como ponen de manifiesto Bilbao y López [7].

En esta sección, se expondrán algunos conceptos debidos a Edelman y Jamison [26].

Un espacio de clausura es un par $(N, \mathcal{L})$ donde $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos de un conjunto finito N, que cumple las siguientes propiedades:

(P1) $\emptyset \in \mathcal{L}$ y $N \in \mathcal{L}$.

(P2) Si $A \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{L}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{L}$

Los elementos de $\mathcal{L}$ se denominan *conjuntos cerrados* [78].

Teniendo en cuenta que la intersección es cerrada para los elementos de $\mathcal{L}$ y que cualquier subconjunto de N está incluido, al menos, en un conjunto cerrado, tiene sentido definir el *operador clausura*:

$$- : 2^N \longrightarrow 2^N, \quad A \longmapsto \overline{A} = \bigcap \{C \in \mathcal{L} : A \subseteq C\} \in \mathcal{L},$$

que tiene las siguientes características:

(C1) $A \subseteq \overline{A}$, para todo $A \subseteq N$.

(C2) Si $A \subseteq B \subseteq N$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(C3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, para todo $A \subseteq N$.

Obviamente $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Para $S \subseteq N$, $\overline{S}$ se denominará *clausura* de S. Recíprocamente, a partir de cualquier operador clausura, se puede construir el espacio de clausura $\mathcal{L}$ determinado por los cerrados del operador, es decir,

$$A \in \mathcal{L} \text{ si y sólo si } A = \overline{A}.$$

Una *base* para $S \in 2^N$ es un subconjunto minimal $B \subseteq S$ verificando $\overline{B} = \overline{S}$. Un elemento i de un conjunto $S \subseteq N$ es un *punto extremal* de S si $i \notin \overline{S \setminus \{i\}}$. El conjunto de los puntos extremales de S se denota por $ex(S)$, el cual puede ser vacío. En general si $(N, \mathcal{L})$ es un espacio de clausura, se verifican las siguientes condiciones:

(a) Si $A \in \mathcal{L}$, entonces $i \in A$ es un punto extremal de A si y sólo si $A \setminus \{i\} \in \mathcal{L}$.

(b) Si $S \subseteq A$ es una base de A, entonces $ex(A) \subseteq S$.

La propiedad (b) pone de manifiesto que cualquier base de $A \in 2^N$ contiene a los puntos extremales de A. Es evidente, que ello no implica que el conjunto de los puntos extremales de A constituya una base suya. Si esto ocurriese para cualquier conjunto cerrado, es decir,

$$\forall S \in \mathcal{L}, \quad \overline{ex(S)} = S,$$

se dice que el espacio clausura $(N, \mathcal{L})$ satisface la propiedad de *Minkowski-Krein-Milman*. En este caso, se tiene la siguiente definición.

El par $(N, \mathcal{L})$ es una *geometría convexa* si es un *espacio de clausura* que verifica la propiedad de *Minkowski-Krein-Milman*: *cada conjunto cerrado es la clausura de sus puntos extremales* o, equivalentemente, *para cualquier conjunto cerrado, el conjunto de sus puntos extremales es la única base.*

La propiedad de Minkowski-Krein-Milman es equivalente a la denominada *propiedad anticambio* [26, Teorema 2.1] (véase Figura 2.3): para todo $S \in \mathcal{L}$ y $p, q \in N \setminus S$, $p \neq q$, se tiene que

$$q \in \overline{S \cup \{p\}} \Longrightarrow p \notin \overline{S \cup \{q\}}.$$

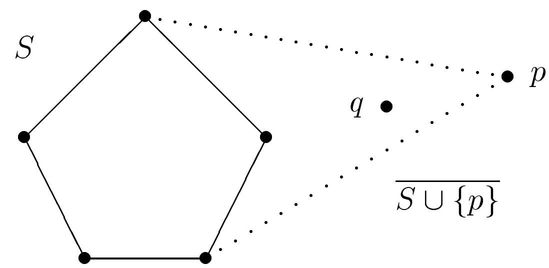

FIGURA 2.3

Evidentemente, si $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa y $S \in \mathcal{L}$, $S \neq \emptyset$, el conjunto de sus puntos extremales es no vacío ya que, en otro caso, resultaría una contradicción: si $ex(S) = \emptyset$, entonces $S = \overline{ex(S)} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

El interés del estudio de las geometrías convexas proviene de la búsqueda de estructuras combinatorias que generalicen, si es posible, los resultados obtenidos con otras estructuras de cooperación utilizadas en la teoría de juegos. Así, se muestran algunos ejemplos de familias de conjuntos con estructura de geometría convexa que han aparecido en la literatura relacionada con la cooperación parcial.

Ejemplo 2.23 *Considérese la situación de comunicación (N, v, E). Anteriormente se indicó que el par $(N, \mathcal{F})$, donde*

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : (S, E(S)) \text{ es un subgrafo conexo de } (N, E)\},$$

es un sistema de partición. Edelman y Jamison establecen, [26, Teorema 3.7], que (N, E) es un grafo bloque conexo si y sólo si $(N, \mathcal{F})$ es una geometría convexa. De ahí resulta que si (N, E) es un grafo bloque conexo, entonces $(N, \mathcal{F})$ es una geometría convexa que es estable para la unión.

Ejemplo 2.24 *El par $(N, \mathcal{L}_n)$, que corresponde a una situación de votación en un orden político unidimensional, considerado en el Ejemplo 2.4, es una geometría convexa que es estable para la unión.*

El caso particular de $\mathcal{L}_5$ *es ilustrado en la siguiente figura.*

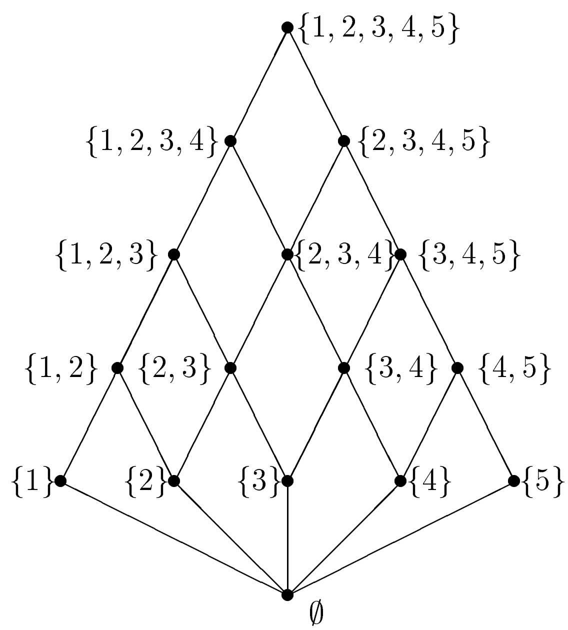

FIGURA 2.4. *La geometría convexa* $\mathcal{L}_5$.

Por último, si $(N, \mathcal{L})$ es una geometría convexa y $S \in \mathcal{L}$, entonces el intervalo $[S^-, S]$, en el retículo $(\mathcal{L}, \subseteq)$, es un álgebra de Boole, siendo

$$S^- = S \setminus ex(S).$$

Este resultado, es una consecuencia directa de un teorema de Edelman y Jamison [26, Teorema 4.2] en el que se establece que el intervalo $[C, K]$, con $C, K \in \mathcal{L}$, es un álgebra de Boole en $(\mathcal{L}, \subseteq)$ si y sólo si $K \setminus C \subseteq ex(K)$. Aquí, es inmediato por ser

$$S^- = \bigcap_{i \in ex(S)} (S \setminus \{i\}) = S \setminus ex(S) \in \mathcal{L},$$

y por tanto $S \setminus S^- = ex(S)$.

2.2 El core y cooperación parcial

Si se tiene presente que cualquier concepto de solución establece una forma de reparto del valor $v(N)$ entre los jugadores; es decir, considera puntos del hiperplano de $\mathbb{R}^n$ constituido por las preimputaciones, es lógico que se consideren éstas, así como el conjunto de imputaciones, para indicar las condiciones mínimas en el estudio de las relaciones entre algunos conceptos de solución correspondientes al juego v y al juego con cooperación restringida.

De ahí, en principio, al ser:

$$\begin{aligned}
I^*(v) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N)\}, \\
I(v) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\ x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N\}, \\
I^*\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)\right\}, \\
I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N),\ x_i \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(\{i\}),\ \forall i \in N\right\},
\end{aligned}$$

y verificarse que $v(\{i\}) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(\{i\})$, para todo $i \in N$, se deduce

$$I^*(v) = I^*\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) \Longleftrightarrow I(v) = I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) \Longleftrightarrow v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N).$$

Además,

$$v(N) \neq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) \Longleftrightarrow I^*(v) \cap I^*\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) = I(v) \cap I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) = \emptyset.$$

Por tanto, para establecer relaciones entre los conceptos de solución correspondientes a los juegos (N, v) y $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, es necesario partir de la hipótesis inicial: $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$.

2.2.1 Sistemas unitarios

Si se considera una terna $(N, v, \mathcal{F})$, donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema unitario y (N, v) un juego, es lógico preguntarse por el core del correspondiente juego restringido y si hay, o no, alguna relación entre el core del juego restringido y el del juego (N, v), así como si las coaliciones factibles determinan o no al core del juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$. Los siguientes resultados responden a estas cuestiones.

Proposición 2.25 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario. Si $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces se verifica que $C(v) \subseteq C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.*

Demostración: Considérese $x \in C(v)$. Por un lado, se tiene

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N) = x(N).$$

Por otro lado, sea $S \subset N$, $S \neq \emptyset$. Fijada una partición cualquiera de S en coaliciones factibles de $\mathcal{F}$,

$$S = \bigcup_{k \in K} S_k, \text{ con } S_i \cap S_j = \emptyset \, , i \neq j,$$

se tiene —debido a que cualquier $i \in S$ pertenece a una única coalición factible S_j— que

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i = \sum_{k \in K} \left[\sum_{i \in S_k} x_i \right] = \sum_{k \in K} x(S_k) \geq \sum_{k \in K} v(S_k).$$

Luego, para cada $\{S_k\}_{k \in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, se tiene que

$$x(S) \geq \sum_{k \in K} v(S_k),$$

con lo cual

$$x(S) \geq \max \left\{ \sum_{k \in K} v(S_k) : \{S_k\}_{k \in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S) \right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

□

Nótese que la proposición anterior puede aplicarse a cualquier subjuego $\left(S, \tilde{v}^{\mathcal{F}}_S\right)$, $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, para el que se verifique la condición $v(S) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$.

Por otro lado, si $C(v)$ es no vacío, la igualdad $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N)$ es condición necesaria y suficiente para que se verifique la inclusión entre los cores. Además, se recuerda que si $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) \neq v(N)$ se deduce inmediatamente que la intersección $C(v) \cap C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ es vacía.

Teorema 2.26 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario. Si (N, v) es equilibrado y $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces el juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ también lo es.*

Demostración: Bondareva [14] y Shapley [70] establecen que el juego (N, v) es equilibrado si y sólo si $C(v)$ es no vacío. Ello, junto con la Proposición 2.25, implica el resultado. □

En general, la igualdad $C(v) = C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ no puede asegurarse. No obstante, el core del juego con cooperación restringida por el sistema unitario queda determinado en la siguiente proposición.

Proposición 2.27 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario. Si $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces*

$$C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ \forall S \in \mathcal{F}\}.$$

Demostración: Si $x \in C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, resulta que $x(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = v(N)$ y, además, $x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$, para todo $S \in 2^N$. Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $\{S\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ y, por definición, se verifica que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq v(S)$. Por tanto, resulta que

$$x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq v(S).$$

Recíprocamente, sea $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ y $\{S_k\}_{k\in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$. Entonces,

$$x(S) = \sum_{i\in S} x_i = \sum_{k\in K}\left[\sum_{i\in S_k} x_i\right] = \sum_{k\in K} x(S_k) \geq \sum_{k\in K} v(S_k),$$

y, por tanto

$$x(S) \geq \max\left\{\sum_{k\in K} v(S_k) : \{S_k\}_{k\in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

□

La proposición anterior puede demostrarse también como consecuencia de un resultado de Faigle [28, Lema 10], teniendo en cuenta que, en este caso, el juego restringido, $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, está definido sobre cualquier coalición de N por tratarse de un sistema unitario.

A continuación, se analiza el carácter equilibrado del juego restringido. Para ello, por razones de notación, se utilizará la *función indicador* la cual, para cada $S \subseteq N$, se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{1}_S : N \longrightarrow \{0,1\},\ \ \mathbf{1}_S(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 2.28 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ una familia de conjuntos y $N \in \mathcal{F}$. Entonces,*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ \textit{para todo } S \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$$

si y sólo si para cada solución no negativa del sistema de ecuaciones lineales a que da lugar la igualdad

$$\sum_{S\in\mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}} \lambda_S \mathbf{1}_S = \mathbf{1}_N,$$

se verifica que

$$\sum_{S\in\mathcal{F}\setminus\{\emptyset\}} \lambda_S\, v\,(S) \leq v(N).$$

Demostración: El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), \;\; x(S) \geq v(S), \; \forall \; S \in \mathcal{F}\}$$

es no vacío si y sólo si el programa lineal satisface

$$\min \{\langle \mathbf{1}_N, x\rangle : \langle \mathbf{1}_S, x\rangle \geq v(S), \; \forall S \in \mathcal{F}\} \leq v(N).$$

Utilizando el teorema de dualidad de programación lineal [68, p. 90] se deduce, de forma inmediata, el resultado. □

Obsérvese que, en el teorema anterior, no es necesaria la exigencia de que el par $(N, \mathcal{F})$ constituya un sistema unitario. Obviamente, si lo fuera, con $N \in \mathcal{F}$, se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 2.29 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario y $N \in \mathcal{F}$. Si $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces el juego $(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}})$ es equilibrado si y sólo si para cada solución no negativa del sistema de ecuaciones lineales a que da lugar la igualdad*

$$\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \mathbf{1}_S = \mathbf{1}_N,$$

se verifica que

$$\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \, v\,(S) \leq v(N).$$

2.2.2 Sistemas estables para la unión

Lógicamente, al igual que en el apartado anterior, es necesario establecer que la condición mínima para la interrelación entre los conceptos de solución, es que sea cierta la igualdad $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$. Sin embargo, es necesario precisar que, para las estructuras de cooperación estables para la unión, la igualdad $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ no es una condición necesaria y suficiente para que $I(v) = I(v^{\mathcal{F}})$. Ello es debido a que, en esta situación, no siempre es cierto que $v^{\mathcal{F}}(\{i\}) = v(\{i\})$. En general, únicamente puede asegurarse que si $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ y $v(\{i\}) \geq 0$, para todo $i \in N$, entonces $I(v) \subseteq I(v^{\mathcal{F}})$.

Ahora bien, si el juego (N, v) es cero-normalizado, se garantiza la igualdad entre los conjuntos de imputaciones correspondientes al juego v y al $\mathcal{F}$-juego restringido. También, dicha igualdad, es cierta para sistemas de partición aunque el juego no sea cero-normalizado.

Proposición 2.30 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión y sea (N, v) cero-normalizado. Se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Si $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces $C(v) \subseteq C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$.

(b) Para toda coalición $S \in \mathcal{F}$, se verifica que $C(v_S) \subseteq C\left(v_S^{\mathcal{F}}\right)$.

Demostración: (a) Sea $x \in C(v)$. En primer lugar, $v^{\mathcal{F}}(N) = v(N) = x(N)$. Por otro lado, si $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ y $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_k\}_{k \in K}$, entonces

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{k \in K} v(S_k) \leq \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) \leq \sum_{i \in S} x_i = x(S),$$

ya que las $\mathcal{F}$-componentes de S satisfacen que $\bigcup_{k \in K} S_k \subseteq S$ y, además, $x_i \geq v(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.

(b) Si $S \in \mathcal{F}$, entonces $v(S) = v^{\mathcal{F}}(S)$. Aplicando el apartado (a), se obtiene que $C(v_S) \subseteq C\left(v_S^{\mathcal{F}}\right)$. □

Teorema 2.31 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión tal que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ y sea (N, v) cero-normalizado. Entonces, se verifican las siguientes condiciones:*

(a) Si (N, v) es un juego equilibrado, también lo es $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

(b) Si (N, v) es totalmente equilibrado, el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ también lo es.

Demostración: (a) Es immediato, teniendo en cuenta el resultado de Bondareva y Shapley aludido en el Teorema 2.26 y aplicando el apartado (a) de la proposición anterior.

(b) Se tiene que probar que para todo $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, los subjuegos inducidos $\left(S, v_S^{\mathcal{F}}\right)$ son equilibrados. Si $S \in \mathcal{F}$, el subjuego (S, v_S) es equilibrado y, según el apartado (b) de la Proposición 2.30, se deduce que lo es el juego $\left(S, v_S^{\mathcal{F}}\right)$. Si $S \notin \mathcal{F}$ y $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_l\}_{l=1}^{k}$, entonces por hipótesis

$$C(v_{S_l}) \neq \emptyset, \quad l = 1, \ldots, k.$$

Para probar que el subjuego $\left(S, v_S^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado, es suficiente probar que su core es no vacío. En efecto, considérese

$$x^{S_1} \in C(v_{S_1}), \ldots, x^{S_k} \in C(v_{S_k}).$$

En general, se tiene

$$S = \left(\bigcup_{l=1}^{k} S_l\right) \cup \left(\bigcup_{j \in S \setminus \bigcup S_l} \{j\}\right).$$

Dado $i \in S$, pueden ocurrir dos casos: que exista una única $\mathcal{F}$-componente S_p de S tal que $i \in S_p$, o bien que $i \in \left(\bigcup_{j \in S \setminus \bigcup S_l} \{j\}\right)$. En el primer caso, a cada $i \in S_p \subset S$, se le puede asociar

$$i \longmapsto x_i^{S_p},$$

donde $x_i^{S_p}$ es la componente del jugador i en el vector $x^{S_p} \in C(v_{S_p})$. En el segundo caso, a cada i se le asigna un cero.

Con el razonamiento anterior, se define un vector $y \in \mathbb{R}^{|S|}$, tal que

$$y_i = \begin{cases} x_i^{S_p} & \text{si } i \in S_p, \\ 0 & \text{si } i \in \left(\bigcup_{j \in S \setminus \bigcup S_l} \{j\}\right). \end{cases}$$

Este vector así construido está en el core del subjuego inducido $\left(S, v_S^{\mathcal{F}}\right)$ ya que verifica,

$$\begin{aligned} y(S) &= \sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in\bigcup S_l} x_i^{S_l} = \sum_{l=1}^{k}\left[\sum_{i\in S_l} x_i^{S_l}\right] \\ &= \sum_{l=1}^{k} x^{S_l}(S_l) = \sum_{l=1}^{k} v(S_l) = v_S^{\mathcal{F}}(S). \end{aligned}$$

Además, si $T\subset S$, $T\neq\emptyset$ y $C_{\mathcal{F}}(T)=\{T_h\}_{h\in H}$, entonces, por definición, $v_S^{\mathcal{F}}(T)=\sum_{h\in H} v(T_h)$ y se tiene

$$T\subseteq\left(\bigcup_{l=1}^{k} S_l\right)\cup\left(\bigcup_{j\in S\setminus\bigcup S_l}\{j\}\right).$$

Para cada $h\in H$, es claro que existe una única j, $1\leq j\leq k$, tal que $T_h\subseteq S_j$. Por otro lado $x^{S_j}\in C(v_{S_j})$, de donde

$$v(T_h)=v_{S_j}(T_h)\leq x^{S_j}(T_h)=\sum_{i\in T_h} x_i^{S_j}.$$

De aquí, se concluye que

$$\begin{aligned} v_S^{\mathcal{F}}(T) &= \sum_{h\in H} v(T_h)\leq\sum_{h\in H}\left[\sum_{i\in T_h} x_i^{S_j}\right] \\ &= \sum_{i\in\bigcup T_h} x_i^{S_j}=\sum_{i\in T} y_i = y(T). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.32 *Sea la terna $(N,v,\mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión y sea (N,v) cero-normalizado. Entonces,*

$$C\left(v^{\mathcal{F}}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n : x(N)=v^{\mathcal{F}}(N),\ x(S)\geq v(S),\ \forall S\in\mathcal{F}\right\}.$$

Demostración: Sea $x \in C(v^{\mathcal{F}})$, entonces

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N), \quad x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

Por tanto, $x(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, $x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$, para toda $S \in \mathcal{F}$ y, además, $x(\{i\}) \geq v^{\mathcal{F}}(\{i\}) = 0$, para todo $i \in N$.

Para probar la inclusión contraria, sea $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que

$$x(N) = v^{\mathcal{F}}(N), \quad x(S) \geq v(S), \quad \forall S \in \mathcal{F}.$$

Entonces, para todo $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, pueden ocurrir dos casos: que el conjunto de las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición S sea vacío o no.

Si $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = 0$ y, como $x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces, se tiene que $x(S) \geq v^{\mathcal{F}}(S) = 0$. Si $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$, sea $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Entonces, se verifica que $\bigcup_{j=1}^{k} S_j \subseteq S$ y, de aquí,

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i \in S_j} x_i \right] = \sum_{j=1}^{k} x(S_j) \geq \sum_{j=1}^{k} v(S_j) = v^{\mathcal{F}}(S).$$

$\square$

Nótese que en los resultados establecidos en la Proposición 2.30, el Teorema 2.31 y la Proposición 2.32 puede sustituirse la hipótesis de que el juego (N, v) sea cero-normalizado por cualquier otra que implique la condición de ser $v(\{i\}) \geq 0$, para todo elemento $i \in N$.

También, puede observarse que si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición, la hipótesis señalada anteriormente puede suprimirse ya que, en este caso particular, la unión de las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición no vacía da lugar a la misma.

Corolario 2.33 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Si el $\mathcal{F}$-juego restringido verifica que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, entonces*

$$C\left(v^{\mathcal{F}}\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S),\ \forall S \in \mathcal{F}\}.$$

Proposición 2.34 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición. Si se verifica que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$, entonces*

$$C\left(v^{\mathcal{F}}\right) = C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: Si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de partición es, también, un sistema unitario. Por tanto, tiene sentido considerar los juegos restringidos $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. La Proposición 2.27 y el Corolario 2.33 aseguran el resultado. □

Proposición 2.35 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y $N \in \mathcal{F}$. Entonces, el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado si y sólo si para cada solución no negativa del sistema de ecuaciones lineales a que da lugar la igualdad*

$$\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \mathbf{1}_S = \mathbf{1}_N,$$

se verifica que

$$\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \, v\left(S\right) \leq v(N).$$

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Teorema 2.28 y del Corolario 2.33 ya que, en este caso, $N \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$. □

Teorema 2.36 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema de partición y $N \in \mathcal{F}$ tal que el programa lineal*

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \, v\left(S\right), \\ s.\ a & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S \mathbf{1}_S = \mathbf{1}_N, \\ & \lambda_S \geq 0, \ \forall S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}, \end{array}$$

tiene una solución entera óptima. Entonces, el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado si y sólo si para toda partición, $\{S_1, \ldots, S_p\}$, de N en coaliciones factibles, se verifica la desigualdad

$$v\left(S_1\right) + \cdots + v\left(S_p\right) \leq v(N).$$

Demostración: Si $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado, entonces $C\left(v^{\mathcal{F}}\right) \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$. De aquí,

$$v(N) = x(N) = \sum_{i=1}^{p} x\left(S_i\right) \geq \sum_{i=1}^{p} v(S_i),$$

para cada partición $\{S_i\}_{i=1}^{p}$ de N en coaliciones factibles.

Recíprocamente, sea el programa lineal dual asociado

$$\begin{array}{rl} \min & x(N) \\ \text{s. a} & x(S) \geq v(S),\ \forall S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}. \end{array}$$

El programa primal tiene una solución entera óptima. Por tanto, existe una partición de N en coaliciones factibles, $S_1^*, \ldots, S_r^* \in \mathcal{F}$ y un vector óptimo $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x^*(N) = \sum_{i=1}^{r} v\left(S_i^*\right).$$

La hipótesis implica que $x^*(N) \leq v(N)$ y $x^*(S) \geq v(S)$, para todo $S \in \mathcal{F}$. Como $N \in \mathcal{F}$, resulta finalmente que $x^* \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$. □

Si (N, v, E) es una situación de comunicación, con (N, v) superaditivo y cero-normalizado, donde (N, E) es un árbol, entonces la familia de coaliciones factibles $(N, \mathcal{F})$ correspondiente (véase Ejemplo 2.5) y el juego (N, v), satisfacen las hipótesis del Teorema 2.36, (ver [42]). Por tanto, este resultado implica la Proposición 2 de Potters y Reijnierse [63].

2.3 Conjuntos estables y cooperación parcial

En esta sección, se estudian las relaciones que existen entre la dominancia de imputaciones en el juego (N, v) y en los correspondientes juegos restringidos, con el objetivo de analizar si se conserva la estabilidad de un determinado conjunto de imputaciones cuando se condiciona la cooperación.

2.3.1 Sistemas unitarios

En este apartado, se van a considerar ternas $(N, v, \mathcal{F})$ en las que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema unitario y (N, v) es un juego cooperativo para el que se verifica la igualdad $v(N) = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(N)$.

El primer resultado establece que la relación de dominación entre imputaciones, a través de una coalición factible, se mantiene cuando se establece una cooperación parcial basada en un sistema unitario.

Proposición 2.37 *Sean $(N, v, \mathcal{F})$ donde $(N, \mathcal{F})$ es un sistema unitario y $S \in \mathcal{F}$. Si $x, y \in I(v)$, entonces*

$$x \; dom_S \; y \; \text{en} \; (N, v) \Longrightarrow x \; dom_S \; y \; \text{en} \; \left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: Teniendo en cuenta que $I(v) = I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, es suficiente probar que si $v(S) \geq x(S)$, con $S \in \mathcal{F}$, entonces se verifica que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq x(S)$.

En efecto, al ser

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = \max\left\{\sum_{i \in I} v(S_i) : \{S_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\}$$

y $\{S\} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$, se deduce que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq v(S) \geq x(S)$. $\square$

El recíproco no es cierto. El siguiente ejemplo permite afirmar que si $x \operatorname{dom}_S y$, con $S \in \mathcal{F}$, en el juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, no se deduce que se siga manteniendo la relación de dominancia en el juego (N, v).

Ejemplo 2.38 *Sean $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la función característica del juego (N, v) definida por*

$$v(S) = \begin{cases} 3 & si \;\; |S| = 2, \\ 4 & si \;\; 3 \leq |S| \leq 4, \\ 7 & si \;\; S = N, \\ 0 & en \; otro \; caso, \end{cases}$$

y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}, N\}$.

Nótese que (N, v) *es un juego monótono y cero-normalizado, aunque no es superaditivo. Como* $v(N) = 7$ *y* $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(N) = \max\{0,3,6,4,7\} = 7$*, se verifica que*

$$I(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^5 : x(N) = 7,\ \ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq 5\right\} = I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right).$$

Sean $x = (1,2,1,1,2)$, $y = (0,1,0,0,6) \in I(v) = I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$. *Puede observarse que* $x\, dom\, y$ *en* $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ *a través de la coalición* $S = \{1,2,3,4\} \in \mathcal{F}$ *ya que,*

$$x_i > y_i,\ \ 1 \leq i \leq 4\ \ y\ \ x(S) = 5 \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) = 6.$$

Sin embargo, aunque x *domina a* y *a través de* $S \in \mathcal{F}$*, en el juego* $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$*, ello no ocurre en el juego* (N, v) *al ser* $x(S) = 5 \not\leq 4 = v(S)$.

La Proposición 2.37 está formulada considerando la circunstancia en la que la coalición S sea factible. Si $S \notin \mathcal{F}$, entonces no se da ninguna relación entre la dominancia debido a que no existen relaciones permanentes entre $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$ y $v(S)$. No obstante, puede formularse el siguiente resultado.

Proposición 2.39 *Sean* $(N, v, \mathcal{F})$ *con* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema unitario y* $S \notin \mathcal{F}$. *Si* $x, y \in I(v)$ *tales que* $x\, dom_S\, y$ *en el juego* (N, v) *y existe una partición* $\{S_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ *cuyos elementos verifican*

$$|S_i| \geq 2 \quad y \quad x\, dom_{S_i}\, y, \quad \forall i \in I, \quad en\ el\ juego\ \ (N, v)$$

entonces $x\, dom_S\, y$ *en el juego* $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

Demostración: Evidentemente $x_i > y_i$, para cualquier $i \in S$. Por otro lado, sea $\{S_i\}_{i \in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)$ la partición indicada en la hipótesis. Entonces, $x(S) = \sum_{i \in I} x(S_i)$ y, además, $x(S_i) \leq v(S_i)$ ya que, $x\, \mathrm{dom}_{S_i}\, y$ en (N, v), para toda S_i. Luego,

$$x(S) \ \ = \ \ \sum_{i \in I} x(S_i) \leq \sum_{i \in I} v(S_i)$$

$$\leq \quad \max\left\{\sum_{k\in K} v(S_k) : \{S_k\}_{k\in K} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\} = \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S).$$

Por definición, las desigualdades $x(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$, $x_i > y_i$, para todo $i \in S$, implican que $x \operatorname{dom}_S y$ en el juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$. □

Proposición 2.40 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario y (N, v) superaditivo para las coaliciones factibles disjuntas dos a dos. Si $x, y \in I(v)$, entonces*

$$x \text{ dom}_S\, y \text{ en } \left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) \Longrightarrow x \text{ dom}_S\, y \text{ en } (N, v).$$

Demostración: Si $x \operatorname{dom}_S y$ en $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, entonces $x_i > y_i$, para todo $i \in S$, y $x(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$. Sea $\{S_k^*\}_{k\in K}$ la partición de S en coaliciones factibles para la que se alcanza el máximo. Entonces, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) &= \max\left\{\sum_{i\in I} v(S_i) : \{S_i\}_{i\in I} \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(S)\right\} \\
&= \sum_{k\in K} v(S_k^*) \leq v\left(\bigcup_{k\in K} S_k^*\right) = v(S).
\end{aligned}$$

Por tanto, $x(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$. □

De manera inmediata surgen las siguientes consecuencias.

Corolario 2.41 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ con $(N, \mathcal{F})$ un sistema unitario y considérense $x, y \in I(v)$. Se verifica:*

(a) Si (N, v) es superaditivo y $S \in \mathcal{F}$, entonces

$$x \text{ dom}_S\, y \text{ en } (N, v) \Longleftrightarrow x \text{ dom}_S\, y \text{ en } \left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right).$$

(b) Si (N, v) es simple y propio,

$$x \text{ dom}_S\, y \text{ en } \left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right) \Longrightarrow x \text{ dom}_S\, y \text{ en } (N, v).$$

La proposición anterior permite indicar que, bajo la condición de superaditividad del juego (N,v), si $V \subset I(v)$ es internamente estable en el juego (N,v), también va a serlo en el juego $\left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$. Ahora bien, previo a enunciar el resultado correspondiente, se quiere indicar que, siguiendo la notación de Driessen [24], dado $V \subset I(v)$, se denotará por dom$V$ al conjunto de todas las imputaciones que son dominadas por imputaciones del conjunto V; es decir,

$$\mathrm{dom}\, V = \{x \in I(v) : \text{existe } y \in V \text{ tal que } y \,\mathrm{dom}\, x\}.$$

Proposición 2.42 *Sea $(N,v,\mathcal{F})$ con $(N,\mathcal{F})$ un sistema unitario y (N,v) un juego superaditivo. Si $V \subset I(v)$, entonces*

$$V \cap dom V = \emptyset \text{ en } (N,v) \Longrightarrow V \cap dom V = \emptyset \text{ en } \left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: Por reducción al absurdo: supóngase que $V \cap \mathrm{dom}V \neq \emptyset$ en $\left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, lo que significa que existe $x \in V$ y $x \in \mathrm{dom}\, V$. Por tanto, existe, además, $y \in V$ tal que y $\mathrm{dom}_S\, x$ en $\left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ a través de alguna coalición S. Aplicando la Proposición 2.40 resulta que y $\mathrm{dom}_S\, x$ en (N,v) y, entonces, $x \in \mathrm{dom}V$ en (N,v). De aquí, $V \cap \mathrm{dom}V \neq \emptyset$ en (N,v), lo cual está en contradicción con la hipótesis. □

Sin embargo, si $V \subset I(v)$ tiene estabilidad externa en el juego (N,v), no puede asegurarse, de manera inmediata, la estabilidad externa en el juego $\left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

Por último, se establecen algunas relaciones entre el core, la dominancia y los conjuntos estables.

Proposición 2.43 *Sea $(N,v,\mathcal{F})$ con $(N,\mathcal{F})$ un sistema unitario.*

(a) Si $x \in C(v)$, entonces no existe $y \in I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ tal que $y\, dom\, x$ en el juego $\left(N,\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

(b) *Sea (N,v) superaditivo y $x \in I(v)$. Si no existe $y \in I(v)$ tal que $y \operatorname{dom} x$ en (N,v), entonces $x \in C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.*

(c) *El core del juego (N,v) está incluido en cualquier conjunto estable para el juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.*

Demostración: (a) Si $x \in C(v)$, entonces $x(S) \geq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$, para toda coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, ya que, utilizando la Proposición 2.25, se verifica la inclusión $C(v) \subseteq C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

Si existiera $y \in I\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ tal que $y \operatorname{dom} x$ en $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$, implicaría que existe $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, tal que $y \operatorname{dom}_S x$; es decir, existe una coalición S para la que se verifican $y(S) > x(S)$, $y(S) \leq \tilde{v}^{\mathcal{F}}(S)$.

De lo anterior se deduce que $\tilde{v}^{\mathcal{F}}(S) \geq y(S) > x(S)$, lo que está en contradicción con el hecho de que $x \in C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

(b) Si no existe $y \in I(v)$ tal que $y \operatorname{dom} x$, en (N,v), entonces, por la Proposición 2.40, no existe y que domine a x en el juego $\left(N, \tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ y, teniendo en cuenta la caracterización del core para juegos superaditivos ([24, Teorema 4.2]), resulta que $x \in C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$.

(c) Es inmediato debido a que, según la Proposición 2.25, $C(v) \subseteq C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$. $\square$

Proposición 2.44 *Sea $(N,v,\mathcal{F})$ con $(N,\mathcal{F})$ una familia intersectante unitaria y (N,v) un juego convexo. Entonces, $C\left(\tilde{v}^{\mathcal{F}}\right)$ es el único conjunto estable para el juego restringido.*

Demostración: Es una consecuencia inmediata del resultado de Faigle [28, pág. 48], por el que se transmite la convexidad del juego (N,v) al juego restringido, y del hecho de ser el core, cuando un juego es convexo, el único conjunto estable [71]. $\square$

2.3.2 Sistemas estables para la unión

En general, los resultados anteriormente establecidos en $(N, v, \mathcal{F})$, siendo $(N, \mathcal{F})$ sistemas unitarios, pueden ser probados para estructuras de cooperación que son estables para la unión. Con tal objetivo, se considerarán ternas $(N, v, \mathcal{F})$ en las que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema de coaliciones estable para la unión y (N, v) es un juego cooperativo tal que $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$ y $v(\{i\}) \geq 0$, para todo $i \in N$.

En este apartado, conviene recordar que las condiciones anteriores, únicamente aseguran que $I(v) \subseteq I\left(v^{\mathcal{F}}\right)$. De ahí que, a veces, sea necesario introducir alguna condición adicional.

Proposición 2.45 *Sean $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión y $S \in \mathcal{F}$. Si $x, y \in I(v)$, entonces*

$$x \; dom_S \, y \;\; en \;\; (N, v) \Longrightarrow x \; dom_S \, y \;\; en \;\; \left(N, v^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: Como $I(v) \subseteq I\left(v^{\mathcal{F}}\right)$, basta probar que si $S \in \mathcal{F}$, la desigualdad $v(S) \geq x(S)$ implica que $v^{\mathcal{F}}(S) \geq x(S)$. Ello es inmediato ya que al ser $S \in \mathcal{F}$, se tiene la igualdad $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$. $\square$

Nótese que la igualdad $v^{\mathcal{F}}(S) = v(S)$ permite formular la proposición recíproca siempre que el juego (N, v) y el juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ tengan el mismo conjunto de imputaciones. Para ello, es suficiente exigir, además de ser $v(N) = v^{\mathcal{F}}(N)$, que (N, v) sea un juego cero-normalizado o que el par $(N, \mathcal{F})$ sea un sistema de partición. En ambas circunstancias, sería cierto que, para $S \in \mathcal{F}$,

$$x \, \mathrm{dom}_S \, y \text{ en } (N, v) \Longleftrightarrow x \, \mathrm{dom}_S \, y \text{ en } \left(N, v^{\mathcal{F}}\right).$$

Proposición 2.46 *Sean* $(N, v, \mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión y* $S \notin \mathcal{F}$. *Si* $x, y \in I(v)$ *tales que* $x\, dom_S\, y$ *en el juego* (N, v) *y los elementos de* $C_{\mathcal{F}}(S) = \{S_i\}_{i \in I}$ *verifican*

$$|S_i| \geq 2 \quad y \quad x\, dom_{S_i}\, y, \quad \forall i \in I,$$

entonces, $x\, dom_S\, y$ *en el juego* $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

Demostración: Evidentemente $x_j > y_j$, para cualquier $j \in S$. Por otro lado, sea $\{S_i\}_{i \in I}$ el conjunto de las coaliciones factibles maximales de la coalición S. Entonces, $x(S) = \sum_{i \in I} x(S_i)$ y, además, $x(S_i) \leq v(S_i)$ ya que, $x\, \mathrm{dom}_{S_i}\, y$, para toda S_i. Luego

$$x(S) = \sum_{i \in I} x(S_i) \leq \sum_{i \in I} v(S_i) = v^{\mathcal{F}}(S).$$

Las desigualdades $x(S) \leq v^{\mathcal{F}}(S)$, $x_j > y_j$, para todo $j \in S$, implican que $x\, \mathrm{dom}_S\, y$ en el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. $\square$

Proposición 2.47 *Sea* $(N, v, \mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión con* (N, v) *cero-normalizado y superaditivo. Si* $x, y \in I(v)$, *entonces*

$$x\, dom_S\, y \text{ en } \left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \Longrightarrow x\, dom_S\, y \text{ en } (N, v).$$

Demostración: Si $x\, \mathrm{dom}_S\, y$ en $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, entonces $x_i > y_i$, para todo $i \in S$, y $x(S) \leq v^{\mathcal{F}}(S) \leq v(S)$ al ser (N, v) superaditivo y cero-normalizado. $\square$

De manera inmediata se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 2.48 *Sea* $(N, v, \mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión con* (N, v) *cero-normalizado, simple y propio. Si* $x, y \in I(v)$, *entonces*

$$x\, dom_S\, y \text{ en } \left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \Longrightarrow x\, dom_S\, y \text{ en } (N, v).$$

Al igual que ocurría en los sistemas unitarios, la proposición anterior permite indicar que, bajo las condiciones de superaditividad y cero-normalización del juego (N, v), si $V \subset I(v)$ es internamente estable en el juego (N, v), también va a serlo en el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

Proposición 2.49 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión con (N, v) un juego superaditivo y cero-normalizado. Si $V \subset I(v)$, entonces*

$$V \cap dom V = \emptyset \ en \ (N, v) \Longrightarrow V \cap dom V = \emptyset \ en \ \left(N, v^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: La prueba es análoga a la realizada para la Proposición 2.42. □

Recuérdese que la hipótesis de que el juego (N, v) sea cero-normalizado puede ser omitida si el par $(N, \mathcal{F})$ constituye un sistema de partición. También, del mismo modo como se razonó para los sistemas unitarios, puede indicarse aquí que si $V \subset I(v)$ tiene estabilidad externa en el juego (N, v), no puede asegurarse, de manera inmediata, la estabilidad externa en el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

Por último, se establece una relación entre el core y la dominancia. Además, se proporciona una condición suficiente para que el core del $\mathcal{F}$-juego restringido sea el único conjunto estable.

Proposición 2.50 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión y (N, v) un juego cero-normalizado.*

(a) Si $x \in C(v)$, entonces no existe $y \in I\left(v^{\mathcal{F}}\right)$ tal que $y \, dom \, x$ en el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

(b) Sean (N, v) superaditivo y $x \in I(v)$. Si no existe $y \in I(v)$ tal que $y \, dom \, x$ en (N, v), entonces $x \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$.

(c) El core del juego (N, v) está incluido en cualquier conjunto estable para el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

Demostración: Análoga a la correspondiente de la Proposición 2.43 aunque, en este caso, es necesaria la Proposición 2.30 para establecer la relación de inclusión entre $C(v)$ y $C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$, y en el apartado (b) se ha utilizado la Proposición 2.14 que asegura que el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es superaditivo. $\square$

Proposición 2.51 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ con $(N, \mathcal{F})$ una familia intersectante y (N, v) un juego convexo y cero-normalizado. Entonces, $C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$ es el único conjunto estable para el $\mathcal{F}$-juego restringido.*

Demostración: El Teorema 2.20 asegura que el juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es convexo. Entonces, su core es el único conjunto estable. $\square$

Capítulo 3

El valor de Myerson generalizado

En el capítulo anterior se han introducido diferentes clases de familias de coaliciones factibles que modelan la cooperación parcial y los conceptos de juegos restringidos por dicha cooperación. Para ellos, se han estudiado algunos conceptos de solución que asocian, a cada juego restringido, un subconjunto del conjunto de imputaciones y se han relacionado estos conceptos, en lo posible, con sus homólogos en el caso de que no existan restricciones a la cooperación.

El objetivo de los dos capítulos siguientes es considerar algunos conceptos de solución que asocien, a cada juego restringido por la cooperación, una única distribución de pagos. Si se tiene en cuenta que el antecedente clásico, en estos modelos de cooperación parcial, es el valor de Myerson para situaciones de comunicación, es lógico plantearse el estudio de su generalización en este contexto de familias de coaliciones factibles, así como su caracterización axiomática. Esto constituye el objetivo específico de este capítulo.

Básicamente, el capítulo está dividido en tres partes. La primera presenta y desarrolla los conceptos de *base* y *soporte* en un sistema de coaliciones factibles que sea estable para la unión. Estos conceptos tendrán un papel fundamental en la axiomatización del valor generalizado de Myerson y permitirán, en paralelo, establecer una estrecha relación entre este modelo de cooperación parcial y las denominadas estructuras de conferencias de Myerson (1980) [54]. La segunda parte se centrará en definir y estudiar algunas propiedades del valor de Myerson generalizado, obteniéndose una primera caracterización axiomática del mismo para, en la tercera parte, plantear algunas ideas que permitan un cómputo más eficaz; estas ideas se basarán en los dividendos del juego restringido y en las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición N.

3.1 La base de un sistema estable para la unión

Considérese un sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{F})$ y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. A partir de $\mathcal{G}$ se procede a realizar la siguiente construcción:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}^{(0)} & = & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^{(1)} & = & \{\, S \cup T : S, T \in \mathcal{G}^{(0)},\ S \cap T \neq \emptyset \,\} \\ & \vdots & \\ \mathcal{G}^{(k)} & = & \{\, S \cup T : S, T \in \mathcal{G}^{(k-1)},\ S \cap T \neq \emptyset \,\} \\ & \vdots & \end{array}$$

Obsérvese que

$$\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{G}^{(k)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F},$$

puesto que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $(N, \mathcal{F})$ es un sistema $\cup$-estable. Además, el proceso es siempre finito ya que, al ser $\mathcal{F}$ finito, se obtendrían a lo sumo, todas las coaliciones factibles de $\mathcal{F}$. Esta observación permite introducir el siguiente concepto.

Definición 3.1 *Sean* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable y* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*. Se denomina sistema generado por* $\mathcal{G}$*, denotado por* $SG(\mathcal{G})$*, al conjunto*

$$SG(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{(k)}, \text{ donde } k \text{ es el menor entero tal que } \mathcal{G}^{(k+1)} = \mathcal{G}^{(k)}.$$

Obviamente, $SG(\emptyset) = \emptyset$, $SG(\{S\}) = \{S\}$ para cualquier $S \in \mathcal{F}$, y $SG(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

En el siguiente ejemplo se ilustra este concepto.

Ejemplo 3.2 *Sea* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y considérese el sistema* $\cup$*-estable* $(N, \mathcal{F})$ *dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;=\;& \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \\ & \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, N\}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{G} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}\} \subseteq \mathcal{F}$*, entonces*

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}\}, \\ &\mathcal{G}^{(1)} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,5\}\}, \\ &\mathcal{G}^{(2)} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,5\}\}, \\ &\mathcal{G}^{(3)} = \mathcal{G}^{(2)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$SG(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{(2)} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,5\}\} \subseteq \mathcal{F}$$

y, en este caso, $k = 2$*.*

Proposición 3.3 *Sean* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable y* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*. Entonces, se verifica que* $(N, SG(\mathcal{G}))$ *es también un sistema* $\cup$*-estable.*

Demostración: Supóngase que $SG(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{(k)}$, para algún k y sean las coaliciones $F_1, F_2 \in SG(\mathcal{G})$, con $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Entonces,

$$F_1, F_2 \in \mathcal{G}^{(k)}, \quad F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \implies F_1 \cup F_2 \in \mathcal{G}^{(k+1)} = \mathcal{G}^{(k)}.$$

□

Sería deseable encontrar, para cada sistema de coaliciones estable para la unión, un subconjunto minimal que, por el proceso anteriormente descrito, genere toda la familia inicial. Esta idea conduce a los siguientes conceptos.

Sean $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Si $(N, \mathcal{G})$ es $\cup$-estable existirán, posiblemente, coaliciones factibles que puedan expresarse como unión de dos coaliciones factibles con intersección no vacía. Esto da lugar a considerar el conjunto:

$$D(\mathcal{G}) = \{G \in \mathcal{G} : G = A \cup B,\ A \neq G,\ B \neq G,\ A, B \in \mathcal{G},\ A \cap B \neq \emptyset\}.$$

Es decir, $D(\mathcal{G})$ está formado por aquellas coaliciones factibles que se pueden expresar como unión de otras dos coaliciones factibles distintas y no disjuntas.

Definición 3.4 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Al conjunto*

$$B(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \setminus D(\mathcal{F}),$$

se le denomina base de $\mathcal{F}$. Sus elementos se llaman soportes de $\mathcal{F}$.

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de base.

Ejemplo 3.5 *Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y considérese la familia de coaliciones factibles*

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

El sistema $(N, \mathcal{F})$ es estable para la unión de coaliciones con intersección no vacía. Para calcular la base de $\mathcal{F}$ se seleccionan, del conjunto de coaliciones factibles, aquéllas que pueden expresarse como unión de dos coaliciones factibles distintas con intersección no vacía; esto es,

$$\begin{array}{lcl} \{1,2,3,4\} & = & \{1,3,4\} \cup \{2,3,4\}, \\ \{1,3,4\} & = & \{1,3\} \cup \{3,4\}, \\ \{1,2,3\} & = & \{1,2\} \cup \{1,3\}, \end{array}$$

y así,

$$D(\mathcal{F}) = \{\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

Finalmente, se eliminan de $\mathcal{F}$ dichas coaliciones, quedando

$$B(\mathcal{F}) = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}.$$

Es evidente que, por construcción, el conjunto $B(\mathcal{F})$ es único y no vacío, siempre que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. El siguiente resultado permite conocer qué elementos de $\mathcal{F}$ forman parte siempre de $B(\mathcal{F})$.

Proposición 3.6 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Se verifican las siguientes condiciones:*

(a) Si $\emptyset \in \mathcal{F}$, entonces $\emptyset \in B(\mathcal{F})$.

(b) Para todo $j \in N$ tal que $\{j\} \in \mathcal{F}$, se verifica que $\{j\} \in B(\mathcal{F})$.

(c) Si $S \in \mathcal{F}$ es un elemento minimal en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, entonces $S \in B(\mathcal{F})$.

(d) Si $S \in \mathcal{F}$ y $S \succ \{j\}$ o bien $S \succ \emptyset$ en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, entonces $S \in B(\mathcal{F})$.

Demostración: Los apartados (a), (b) y (c) son inmediatos ya que el conjunto vacío, las coaliciones unitarias y las coaliciones minimales en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ no pueden expresarse como unión de dos coaliciones distintas de $\mathcal{F}$ y con intersección no vacía.

(d) Sea $S \in \mathcal{F}$ tal que $S \succ \{j\}$ o bien $S \succ \emptyset$. Se puede suponer que S no es unitaria ya que, en otro caso, el resultado es trivial por el apartado (b). Se razona por reducción al absurdo. Si $S \notin B(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \setminus D(\mathcal{F})$, entonces $S \in D(\mathcal{F})$ y así,

$$\exists A, B \in \mathcal{F},\ A \neq S,\ B \neq S,\ A \cap B \neq \emptyset \text{ y } S = A \cup B.$$

Entonces, se tiene que $\emptyset \subset A \subset S$, $\emptyset \subset B \subset S$ y, por tanto, $S \not\succ \emptyset$ en $(\mathcal{F}, \subseteq)$. Por otro lado, si $j \in S$, tal que $\{j\} \in \mathcal{F}$, resulta que $j \in A \cup B$ y así pertenece a A, a B o a ambos. De ahí, $\{j\} \subset A \subset S$ o $\{j\} \subset B \subset S$, con lo que $S \not\succ \{j\}$ en $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

$\square$

Como consecuencia inmediata de los apartados (c) y (d) de la proposición anterior, se tiene que si $S \in \mathcal{F}$ y $|S| \leq 2$, entonces $S \in B(\mathcal{F})$.

Dado $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y teniendo en cuenta los resultados anteriores, se puede establecer la aplicación

$$\varphi : 2^{\mathcal{F}} \longrightarrow 2^{\mathcal{F}}, \qquad \varphi(\mathcal{G}) = \overline{\mathcal{G}} = SG(\mathcal{G}),$$

que posee las características que se indican a continuación.

Proposición 3.7 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. La aplicación anteriormente definida $\varphi : 2^{\mathcal{F}} \longrightarrow 2^{\mathcal{F}}$ es un operador clausura; es decir,*

(a) Para todo $\mathcal{G} \in 2^{\mathcal{F}}$, se tiene $\mathcal{G} \subseteq \varphi(\mathcal{G})$.

(b) Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\varphi(\mathcal{G}) \subseteq \varphi(\mathcal{R})$.

(c) Para todo $\mathcal{G} \in 2^{\mathcal{F}}$, $\varphi(\varphi(\mathcal{G})) = \varphi(\mathcal{G})$.

Demostración: (a) Es inmediata por construcción, ya que

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \subseteq SG(\mathcal{G}) = \varphi(\mathcal{G}).$$

(b) Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$. Para demostrar que $SG(\mathcal{G}) \subseteq SG(\mathcal{R})$, se probará que $\mathcal{G}^{(k)} \subseteq \mathcal{R}^{(k)}$ para cada número natural k. Por inducción, si $k = 0$, entonces

$$\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{R} = \mathcal{R}^{(0)}.$$

Supóngase cierto para $k-1$. Sea $H \in \mathcal{G}^{(k)}$, entonces $H = S \cup T$, $S, T \in \mathcal{G}^{(k-1)}$, con $S \cap T \neq \emptyset$ y ello implica, por hipótesis de inducción, que $S, T \in \mathcal{R}^{(k-1)}$. Como $S \cap T \neq \emptyset$, resulta ser $S \cup T = H \in \mathcal{R}^{(k)}$. Luego $\mathcal{G}^{(k)} \subseteq \mathcal{R}^{(k)}$.

(c) Si $\varphi(\mathcal{G}) = SG(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{(k)}$, entonces

$$\varphi(\varphi(\mathcal{G})) = \varphi\left(\mathcal{G}^{(k)}\right) = SG\left(\mathcal{G}^{(k)}\right) = \mathcal{G}^{(k)} = \varphi(\mathcal{G}),$$

ya que, por la Definición 3.1, k es el menor entero tal que $\mathcal{G}^{(k+1)} = \mathcal{G}^{(k)}$. $\square$

La proposición anterior permite afirmar que $\left(\mathcal{F}, \varphi\left(2^{\mathcal{F}}\right)\right)$, siendo

$$\varphi\left(2^{\mathcal{F}}\right) = \left\{\varphi(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \in 2^{\mathcal{F}}\right\} \subseteq 2^{\mathcal{F}},$$

es un espacio de clausura. En lo que sigue, se utilizará la terminología clásica con lo que el espacio de clausura $\left(\mathcal{F}, \varphi\left(2^{\mathcal{F}}\right)\right)$ se denotará por $(\mathcal{F}, -)$ y a los elementos de $\varphi\left(2^{\mathcal{F}}\right)$ se les denominará cerrados.

La siguiente proposición permite caracterizar a los cerrados.

Proposición 3.8 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y considérese el espacio de clausura $(\mathcal{F}, -)$. Entonces $\mathcal{G} \in 2^{\mathcal{F}}$ es cerrado si y sólo si $(N, \mathcal{G})$ es un sistema $\cup$-estable.*

Demostración: Si $\mathcal{G}$ es cerrado, existe $\mathcal{R} \in 2^{\mathcal{F}}$ tal que $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{G}$ y, aplicando la Proposición 3.3, $\left(N, \overline{\mathcal{R}}\right) = (N, \mathcal{G})$ es un sistema $\cup$-estable.
Recíprocamente, si $(N, \mathcal{G})$ es un sistema $\cup$-estable resulta que

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}, \text{ por ser } \mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G},$$

con lo que $\mathcal{G}$ es cerrado. $\square$

Conviene, en principio, no confundir el concepto de base dado por Edelman y Jamison para espacios de clausura con el concepto de base introducido para una familia estable para la unión, aunque, en los resultados que se dan a continuación, se caracteriza la base de una familia estable para la unión y se pone de manifiesto la coincidencia de ambos conceptos, lo que justifica el nombre asociado al conjunto $B(\mathcal{F})$.

Proposición 3.9 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Entonces $B(\mathcal{F})$ es el subconjunto minimal de $\mathcal{F}$ tal que $\overline{B(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$.*

Demostración: En primer lugar, se prueba que $\overline{B(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$. En efecto, por un lado, se tiene que

$$\overline{B(\mathcal{F})} \subseteq \mathcal{F}, \text{ al ser } B(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F} \text{ y } (N, \mathcal{F}) \text{ un sistema } \cup\text{-estable.}$$

Para probar la inclusión contraria, se procede por inducción sobre el número de elementos de las coaliciones factibles de $\mathcal{F}$. Teniendo en cuenta la Proposición 3.6, los elementos minimales en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ pertenecen a la base $B(\mathcal{F})$ y, por tanto, a $\overline{B(\mathcal{F})}$. Ahora, supóngase que $F \in \overline{B(\mathcal{F})}$, para todo $F \in \mathcal{F}$ con $|F| < p$. Entonces, dado $F \in \mathcal{F}$ con $|F| = p$, resulta que $F \in B(\mathcal{F})$ o bien $F \notin B(\mathcal{F})$. En el primer caso, $F \in \overline{B(\mathcal{F})}$. En otro caso, $F \in D(\mathcal{F})$ y, de ahí, la existencia de coaliciones factibles $S, T \in \mathcal{F}$, $S \neq F$, $T \neq F$, $S \cap T \neq \emptyset$ tal que $S \cup T = F$. Aplicando la hipótesis de inducción, ya que $|S| < p$ y $|T| < p$, se tiene que $S, T \in \overline{B(\mathcal{F})}$ y, como $\left(N, \overline{B(\mathcal{F})}\right)$ es un sistema $\cup$-estable, $F = S \cup T \in \overline{B(\mathcal{F})}$.

Por último, la existencia de otro conjunto $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq B(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$, verificando la igualdad $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{F}$, obliga a que los elementos de $B(\mathcal{F})$ pertenezcan a $\mathcal{S}$ ya que no pueden expresarse como unión de dos coaliciones factibles distintas y no disjuntas. Por tanto, sería $\mathcal{S} = B(\mathcal{F})$, lo que indica que $B(\mathcal{F})$ es minimal. $\square$

De la proposición anterior, se puede concluir que $B(\mathcal{F})$ es base de $\mathcal{F}$ en el sentido de Edelman y Jamison para espacios de clausura.

Proposición 3.10 *Sean* $(N, \mathcal{F})$ *y* $(N, \mathcal{G})$, *con* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *sistemas* $\cup$*-estables. Entonces, cualquier elemento de* $B(\mathcal{G})$ *es extremal; es decir,*

$$ex(\mathcal{G}) = B(\mathcal{G}).$$

Demostración: Sea $(N, \mathcal{G})$ un sistema $\cup$-estable y $B(\mathcal{G})$ su base. Edelman y Jamison [26] indican que, en un espacio de clausura, se verifica que el conjunto de puntos extremales de $\mathcal{G}$ está incluido en la base $B(\mathcal{G})$; es decir, $ex(\mathcal{G}) \subseteq B(\mathcal{G})$. Queda, por tanto, demostrar que $B(\mathcal{G}) \subseteq ex(\mathcal{G})$.

Para ello, es suficiente probar que, para todo $B \in B(\mathcal{G})$, se verifica que $\mathcal{G} \backslash \{B\}$ es un sistema $\cup$-estable. En efecto, sean $S, T \in \mathcal{G} \backslash \{B\}$, con $S \cap T \neq \emptyset$. Por un lado, como $S, T \in \mathcal{G}$ tienen intersección no vacía y $\mathcal{G}$ es un sistema $\cup$-estable, resulta que $S \cup T \in \mathcal{G}$. Por otro lado, $S \cup T \neq B$ ya que de ocurrir lo contrario, $B \notin B(\mathcal{G})$ por definición de $B(\mathcal{G})$. Luego, $S \cup T \in \mathcal{G} \setminus \{B\}$. □

Las Proposiciones 3.9 y 3.10 permiten afirmar que el espacio de clausura $(\mathcal{F}, -)$ constituye una geometría convexa ya que, para cualquier cerrado $\mathcal{G}$, se tiene

$$\overline{ex(\mathcal{G})} = \overline{B(\mathcal{G})} = \mathcal{G}.$$

A continuación, se estudian algunas propiedades que relacionan entre sí las $\mathcal{F}$-componentes, las coaliciones factibles y los soportes de cualquier sistema $\cup$-estable. Dichas propiedades no tienen un hilo conductor entre ellas y se exponen por ser necesarias en demostraciones de resultados correspondientes a este capítulo y al capítulo posterior.

Proposición 3.11 *Sea* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable. Se verifican las siguientes condiciones:*

(a) Si $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $F = \bigcup_{i \in I} B_i$, *con* $B_i \in B(\mathcal{F})$.

(b) Si $N \notin \mathcal{F}$, *existe una partición* $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ *de* $B(\mathcal{F})$ *tal que si* $B \in \mathcal{B}_i$, $B' \in \mathcal{B}_j$, *con* $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$, *entonces* $B \cap B' = \emptyset$.

Demostración: (a) Si $F \in \mathcal{F}$, entonces $F \in SG\left(B\left(\mathcal{F}\right)\right)$ y, por tanto, es un soporte o es unión de soportes con intersecciones no vacías.

(b) Sea $N \notin \mathcal{F}$ y $C_{\mathcal{F}}(N) = \{N_1, N_2, \ldots, N_p\}$. Aplicando la Proposición 2.8 se tiene que $N_i \in \mathcal{F}$ y $N_i \cap N_j = \emptyset$, para $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$.

Como $N_i \in \mathcal{F}$, resulta que

$$N_i = \bigcup_{k \in K} B_k, \text{ con } B_k \in B\left(\mathcal{F}\right),$$

y se denotará por $\mathcal{B}_i$ a la colección formada por todos los soportes que están incluidos en la $\mathcal{F}$-componente N_i. Entonces, a cada coalición factible maximal de N se le puede asociar

$$N_i \in C_{\mathcal{F}}(N) \longmapsto \mathcal{B}_i \subseteq B\left(\mathcal{F}\right), \; i = 1, \ldots, p.$$

El conjunto $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ forma una partición de $B\left(\mathcal{F}\right)$. En efecto, por un lado,

$$\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i \subseteq B\left(\mathcal{F}\right).$$

Por otro lado, si $B \in B\left(\mathcal{F}\right)$ entonces $B \in \mathcal{F}$. Si B es factible maximal de N, el propio conjunto B junto con todos los soportes contenidos en él, constituyen una de las colecciones $\mathcal{B}_i$ y, por tanto, $B \in \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$. Si no es maximal, entonces $B \subseteq N_j$ para algún j y, de ahí, $B \in \mathcal{B}_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$.

Por último, si $B \in \mathcal{B}_i$ y $B' \in \mathcal{B}_j$, con $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$, entonces $B \cap B' = \emptyset$. En efecto, si $B \cap B' \neq \emptyset$, entonces $N_i \cap N_j \neq \emptyset$ ya que $B \subseteq N_i$ y $B' \subseteq N_j$. Esto es una contradicción, porque N_i, N_j son $\mathcal{F}$-componentes de N, y por tanto disjuntas.

Luego, $B \cap B' = \emptyset$ y esto permite deducir que $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ es una partición de $B\left(\mathcal{F}\right)$. $\square$

El apartado (a) de la Proposición 3.11 indica que cualquier coalición factible puede expresarse como unión de soportes. Este resultado, puede precisarse en el sentido de que, en la unión, únicamente intervengan soportes no unitarios siempre que la coalición tenga cardinal mayor o igual que dos. Ello se expone en el siguiente resultado.

Proposición 3.12 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Si $F \in \mathcal{F}$ con $|F| \geq 2$, entonces*

$$F = \bigcup_{i \in I} B_i, \;\; \textit{con } B_i \in B(\mathcal{F}) \;\; \textit{tal que } \;|B_i| \geq 2.$$

Demostración: Si $F \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$F = \bigcup_{i \in J} B_i, \;\text{ con } B_i \in B(\mathcal{F}).$$

Es decir, F es un soporte, o bien es una unión de soportes entre los que hay intersecciones no vacías.

Si algún $B_j = \{j\}$, con $j \in N$, entonces debe existir $B_k \in \{B_i\}_{i \in J}$, $k \neq j$ tal que $B_k \cap B_j \neq \emptyset$. Esto implica que $j \in B_k$ y $|B_k| \geq 2$. Por tanto,

$$F = \bigcup_{i \in J} B_i = \bigcup_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} B_i.$$

Procediendo de esta forma, puede escribirse,

$$F = \bigcup_{i \in I \subseteq J} B_i, \text{ con } \; B_i \in B(\mathcal{F}) \; \text{ tal que } \; |B_i| \geq 2.$$

□

Proposición 3.13 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Sean $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{F})$ y $\mathcal{J} \subseteq B(\mathcal{F})$ tal que, para todo $B \in \mathcal{A}$ y todo $B' \in \mathcal{J}$, $B \cap B' = \emptyset$. Entonces,*

(a) Para todo $S \in \overline{\mathcal{A}}$ y todo $S' \in \overline{\mathcal{J}}$, se verifica que $S \cap S' = \emptyset$.

(b) $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{J}}$.

(c) $C_{\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}}}(N) = C_{\overline{\mathcal{A}}}(N) \cup C_{\overline{\mathcal{J}}}(N)$.

Demostración: (a) Si $S \in \overline{\mathcal{A}}$ y $S' \in \overline{\mathcal{J}}$, entonces $S = \bigcup_{i\in I} B_i$, con $B_i \in \mathcal{A}$ y $S' = \bigcup_{j\in J} B_j$, con $B_j \in \mathcal{J}$. Si $S \cap S' \neq \emptyset$, esto implica que

$$\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \neq \emptyset.$$

De ahí, $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (B_i \cap B_j) \neq \emptyset$, de lo que se deduce que $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ para algunos i, j, lo cual es una contradicción con la hipótesis.

(b) Por definición, $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}} = \overline{\{B \in B(\mathcal{F}) : B \in \mathcal{A} \cup \mathcal{J}\}}$. Como cada uno de los soportes de $\mathcal{A}$ tiene intersección vacía con cada uno de los soportes de $\mathcal{J}$, resulta que, aplicando el proceso de construcción de clausura, es inmediato que el conjunto de las coaliciones factibles generadas por los soportes de $\mathcal{A} \cup \mathcal{J}$ coincide con el conjunto unión constituido por las coaliciones factibles generadas por $\mathcal{A}$ y las coaliciones factibles generadas por $\mathcal{J}$.

(c) Puesto que cualquier $\mathcal{F}$-componente de N es una coalición factible en $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}}$, la conclusión es inmediata a partir del apartado (b). □

Es obvio que si, para todo $B \in \mathcal{A}$ y todo $B' \in \mathcal{J}$, se tiene que $B \cap B' = \emptyset$, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Nótese que el hecho de ser $\mathcal{A} \cap \mathcal{J} = \emptyset$, no implica que para todo $B \in \mathcal{A}$ y todo $B' \in \mathcal{J}$, se verifique que $B \cap B' = \emptyset$. En este caso, no se verifica que $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{J}}$, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14 *Sea* $B(\mathcal{F}) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3\}, \{4,5\}\}$ *y considérense los siguientes subconjuntos de* $B(\mathcal{F})$*:* $\mathcal{A} = \{\{1,2\}\}$, $\mathcal{J} = \{\{2,3\}\}$*. Se tiene que* $\mathcal{A} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ *y, sin embargo,* $\{1,2\} \cap \{2,3\} \neq \emptyset$*. Además,*

$$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{J}} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \neq \{\{1,2\}, \{2,3\}\} = \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{J}}.$$

En la Proposición 3.8 se indicó que si $(N, \mathcal{F})$ es un sistema $\cup$-estable y se considera el espacio de clausura $(\mathcal{F}, -)$, los cerrados de dicho espacio son las colecciones $\mathcal{G} \in 2^{\mathcal{F}}$, tal que $(N, \mathcal{G})$ es un sistema $\cup$-estable. Lógicamente, tiene sentido considerar sus respectivas bases $B(\mathcal{G})$, las cuales, en general, no están relacionadas con la base $B(\mathcal{F})$. Esto, se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.15 *Sean $N = \{1,2,3,4\}$ y el sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{F})$ dado por*

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Considérese el sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{G})$ con $\mathcal{G} = \{\{1,2,3\}\} \subseteq \mathcal{F}$. Las bases de ambos sistemas $\cup$-estables son

$$B(\mathcal{F}) = \{\{1\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}, \ B(\mathcal{G}) = \{\{1,2,3\}\},$$

y se verifica que $B(\mathcal{F}) \cap B(\mathcal{G}) = \emptyset$.

No obstante, existe una clase especial de cerrados del espacio $(\mathcal{F},-)$, los cuales tendrán una relevancia fundamental en las secciones posteriores, para los que su base mantiene una relación de inclusión con la base $B(\mathcal{F})$ como se manifiesta en el resultado que se expone a continuación.

Proposición 3.16 *Sean $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y $S \subseteq N$. Considérese la colección*

$$\mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq S\}.$$

Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $(N, \mathcal{F}_S)$ *es un sistema $\cup$-estable.*

(b) $C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}_S}(N)$.

(c) $B(\mathcal{F}_S) = \{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\}$.

Demostración: (a) Sean $A, B \in \mathcal{F}_S$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$ y, por tanto, $A \cup B \in \mathcal{F}$ por ser $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable.

Por otro lado, $A \subseteq S$ y $B \subseteq S$, de donde $A \cup B \subseteq S$ y así $A \cup B \in \mathcal{F}_S$. Por tanto, $(N, \mathcal{F}_S)$ es un sistema $\cup$-estable.

(b) Se puede suponer que $C_{\mathcal{F}_S}(N)$ es no vacío ya que, en otro caso, se verifica la igualdad trivialmente. Sea M una coalición factible maximal de N en $\mathcal{F}_S$. Obviamente $M \subseteq S$ y $M \in \mathcal{F}$. Supóngase que existe $F \in \mathcal{F}$ de forma que $M \subset F \subseteq S$; ello significaría que existe una coalición $F \in \mathcal{F}_S$ que verifica $M \subset F \subseteq N$, lo cual va en contra de que M sea componente maximal de N en $\mathcal{F}_S$. Por tanto, $M \in C_{\mathcal{F}}(S)$. Recíprocamente, sea R una coalición factible maximal de S en $\mathcal{F}$; es inmediato que $R \in \mathcal{F}_S$. Si R no fuera componente maximal de N en $\mathcal{F}_S$, existiría una coalición $F \in \mathcal{F}_S$ que verifica $R \subset F \subseteq N$; ello implica que, al ser $F \subseteq S$ y $F \in \mathcal{F}$, R no sería coalición factible maximal de S en $\mathcal{F}$.

(c) Al ser $(N, \mathcal{F}_S)$ un sistema $\cup$-estable, tiene sentido considerar su base. Habría que probar que $\overline{\{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\}} = \mathcal{F}_S$. En efecto, es inmediato que $\overline{\{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\}} \subseteq \mathcal{F}_S$, ya que $\{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\} \subseteq \mathcal{F}_S$ y $(N, \mathcal{F}_S)$ es un sistema $\cup$-estable.

Sea, entonces, $F \in \mathcal{F}_S$. Ello implica que $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq S$. Como F es una coalición factible, es unión de soportes entre los que hay intersecciones no vacías; es decir,

$$F = \bigcup_{i \in I} B_i, \text{ con } \; B_i \in B(\mathcal{F}).$$

Puesto que $F \subseteq S$, entonces $B_i \subseteq S$ para todo $i \in I$ y, de aquí, se tiene que $B_i \in \{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\}$, para cada $i \in I$. Por tanto, se obtiene que $\mathcal{F}_S \subseteq \overline{\{B \in B(\mathcal{F}) : B \subseteq S\}}$. $\square$

Proposición 3.17 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Entonces, para toda coalición $S \subseteq N$, se verifica*

$$C_{\mathcal{F}}(S) = \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} C_{\mathcal{F}}(S \cap M).$$

Demostración: Se probará el resultado por doble inclusión. Si $R \in C_{\mathcal{F}}(S)$, entonces $R \subseteq S$ y, por definición de coaliciones factibles maximales y la Proposición 2.8, se tiene que $R \subseteq M$ para una única $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$. De ahí, $R \subseteq S \cap M$. Además, R es una $\mathcal{F}$-componente de $S \cap M$ ya que si existiera otra $H \in \mathcal{F}$ con $R \subset H \subseteq S \cap M$, resultaría que $R \subset H \subseteq S$, con lo que R no sería una $\mathcal{F}$-componente de S, en contra de lo supuesto.

Para demostrar la inclusión contraria, considérese que R es una $\mathcal{F}$-componente de la coalición $S \cap M$, para alguna $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$. Se probará que R es una $\mathcal{F}$-componente de S. En efecto, por definición de coalición factible maximal de $S \cap M$, se tiene que no existe una coalición $H \in \mathcal{F}$ verificando que $R \subset H \subseteq S \cap M$; es decir, no existe una coalición $H \in \mathcal{F}$ que verifique, simultáneamente, las condiciones

$$R \subset H \subseteq S \text{ y } R \subset H \subseteq M,$$

lo que lleva a que R es $\mathcal{F}$-componente de S o bien R es $\mathcal{F}$-componente de M. En el segundo caso, se deduce que $R = M \subseteq S$, ya que $M \in \mathcal{F}$ con lo que R es también $\mathcal{F}$-componente de la coalición S. $\square$

Proposición 3.18 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Entonces, para toda coalición $S \subseteq N$, se verifica*

(a) $C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}) = C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)$, para cualquier $i \in N$.

(b) $C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}'}(S)$, donde $\mathcal{F}' = \overline{B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}}$, $B \in B(\mathcal{F})$ tal que $B \nsubseteq S$.

Demostración: (a) Se procederá por doble inclusión. Sea $H \in C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})$, entonces $H \in \mathcal{F}$ y $H \subseteq S \setminus \{i\} \subseteq N \setminus \{i\}$; luego, $H \in \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$ y se verifica $H \subseteq S \setminus \{i\} \subseteq S$. Además, H es maximal para S en $\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$ ya que si existiera $T \in \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$ tal que $H \subset T \subseteq S$, ello implicaría que $H \subset T \subseteq S \setminus \{i\}$ puesto que $i \notin H$, $i \notin T$, lo cual está en contradicción con el supuesto de ser $H \in C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})$.

Por otro lado, si $H \in C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)$, entonces $H \in \mathcal{F}$, $H \subseteq N\setminus\{i\}$ y $H \subseteq S$, por tanto, $H \subseteq S\setminus\{i\}$. Además, H es maximal para $S\setminus\{i\}$ en $\mathcal{F}$ ya que, de lo contrario, existiría $T \in \mathcal{F}$, $H \subset T \subseteq S\setminus\{i\}$ y, de ahí, H no sería maximal de S en $\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$.

(b) Si $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$, no hay ninguna coalición factible de $\mathcal{F}$ contenida en S. Entonces, no puede existir ninguna coalición factible de $\mathcal{F}'$ que esté contenida en S ya que, si ello fuera cierto, la relación de inclusión

$$\overline{B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}} \subseteq \overline{B(\mathcal{F})},$$

daría lugar a una contradicción. Recíprocamente, si $C_{\mathcal{F}'}(S) = \emptyset$ no hay ninguna coalición factible de $\mathcal{F}'$ contenida en S. Al pasar del sistema de coaliciones factibles $\mathcal{F}'$ al sistema $\mathcal{F}$, habría que considerar aquellas coaliciones factibles que se generan mediante uniones, previas intersecciones no vacías, con el soporte B. Si $B \nsubseteq S$, ninguna de estas coaliciones puede estar contenida en S y, por consiguiente, $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$.

En consecuencia, se puede suponer que los conjuntos de coaliciones factibles maximales de S en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son no vacíos. Se analizan las posibilidades de que $S \in B(\mathcal{F})$ o que $S \notin B(\mathcal{F})$. En el primer caso, $S \in B(\mathcal{F})$, resulta que $S \neq B$ ya que $B \nsubseteq S$. Por tanto, $S \in B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}$ y, entonces,

$$C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}'}(S) = \{S\}.$$

En el segundo caso, $S \notin B(\mathcal{F})$, es evidente que $S \notin B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}$ y, teniendo en cuenta que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son los sistemas de coaliciones $\cup$-estables generados por $B(\mathcal{F})$ y $B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}$ respectivamente, la coalición S tendrá unas $\mathcal{F}$-componentes y $\mathcal{F}'$-componentes que serán elementos de $B(\mathcal{F}) \setminus \{B\}$ $(B \nsubseteq S)$ o estarán generadas mediante uniones de elementos de la base en los que no puede intervenir B ya que, si ello fuera cierto, implicaría que $B \subseteq S$.
$\square$

Obsérvese que, tal como se ha indicado en el capítulo anterior, los conceptos introducidos en las estructuras de cooperación estables para la unión generalizan a sus homólogos en las situaciones de comunicación. De manera natural, parece lógico indicar que dos elementos están relacionados si ambos pertenecen a una misma coalición factible. Esto, en las situaciones de comunicación significaría que ambos están en la misma coalición conexa y, por tanto, implica que hay un camino formado por aristas interconectadas que los une. Esta idea de que dos elementos que pertenecen a una misma coalición factible están relacionados mediante un camino, puede generalizarse para las familias $\cup$-estables donde los soportes no unitarios van a desempeñar la misma función que las aristas en un grafo.

Teorema 3.19 *Sea $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable. Si $i, j \in N$, $i \neq j$, son dos elementos de una misma coalición factible S, entonces existe una secuencia de soportes contenidos en la coalición S, $(B_1, \ldots, B_k)$, de tal forma que $i \in B_1$, $j \in B_k$ y, si $k \geq 2$, $B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset$, para $p = 1, \ldots, k-1$.*

Demostración: Se procederá de forma constructiva. Como $S \in \mathcal{F}$, entonces, por la Proposición 3.11, puede expresarse

$$S = \bigcup_{l \in L} B_l, \text{ con } B_l \in B(\mathcal{F}), \forall l \in L,$$

de tal forma que intervengan todos los soportes $B_l \in B(\mathcal{F})$ tales que $B_l \subseteq S$. Ahora, considérense los elementos $i, j \in S$, $i \neq j$. Dado que $i, j \in \bigcup_{l \in L} B_l$, tanto i como j pertenecen a algún o algunos de los elementos soportes que forman la coalición S. Se distinguen tres casos:

1. Los elementos $i, j \in B_h$ para algún B_h. En este caso, (B_h) es una secuencia de soportes que verifica el teorema.

2. Para algún B_h y algún B_p resulta que $i \in B_h$, $j \in B_p$ siendo el conjunto $B_h \cap B_p \neq \emptyset$. En este caso, (B_h, B_p) es una secuencia de soportes que verifica el teorema.

3. Todo soporte al que pertenece i es disjunto con todo soporte que contiene al elemento j; es decir, si $i \in B_h$ y $j \in B_p$ entonces $B_h \cap B_p = \emptyset$.

En este último caso, sin pérdida de generalidad, supóngase que B_1 es uno de los soportes a los que pertenece el elemento i. A partir de él, se construye una secuencia de soportes como se indica a continuación.

Sean $B^{(0)} = \{B_l\}_{l\in L}$ y $C^{(0)} = \{B_1\}$, con $i \in B_1$, $B_1 \in B^{(0)}$, y considérense todos los elementos de la colección $B^{(1)} = B^{(0)} \setminus C^{(0)}$. Debe existir algún o algunos elementos de $B^{(1)}$ que tengan intersección no vacía con el soporte B_1 ya que, si todos los soportes de la colección $B^{(1)}$ son disjuntos con B_1, resultaría que

$$B_1 \cup B_l \notin \mathcal{F}, \quad \forall l \in L,\ l \neq 1,$$

y no podría formarse una coalición factible donde interviniesen todos los elementos de $\{B_l\}_{l\in L}$ y sólo ellos. Sea entonces

$$C^{(1)} = \left\{B \in B^{(1)} : B \cap C \neq \emptyset, \text{ para algún } C \in C^{(0)}\right\} \subset B^{(1)},$$

el conjunto de soportes de $B^{(1)}$ que tienen intersección no vacía con B_1. Obviamente, al ser $(N, \mathcal{F})$ un sistema de coaliciones factibles $\cup$-estable, se tiene que

$$B \cup B_1 \in \mathcal{F},\ \forall B \in C^{(1)} \quad \text{y} \quad B_1 \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(1)}} B\right) \in \mathcal{F}.$$

Además $j \notin B$, para todo $B \in C^{(1)}$ (ya que si fuera cierto se estaría en el caso 2), y así, ninguno de los soportes a los que pertenece el elemento j está en la colección $C^{(1)}$.

$S = \bigcup_{l \in L} B_l, \quad i, j \in S, \quad i \in B_1,\ j \in B_k.$

$B^{(1)} = \{B_l\}_{l \in L} \setminus \{B_1\}$

$C^{(1)} \subset B^{(1)}$

B

$i \in B_1$

$B \cup B_1 \in \mathcal{F}$

$$B_1 \cup \left(\bigcup_{B \in C^{(1)}} B \right) \in \mathcal{F}$$

Considérense, ahora, todos los elementos de la colección

$$B^{(2)} = B^{(1)} \setminus C^{(1)}$$

y, para cada uno de los soportes de $C^{(1)}$, se buscan aquellos elementos de $B^{(2)}$ que tengan intersección no vacía con ellos. Si alguno de los soportes a los que pertenece el elemento j, por ejemplo B_k, (los cuales están en la colección $B^{(2)}$) tiene intersección no vacía con alguno de los soportes $B \in C^{(1)}$, el proceso se acaba ya que existiría una secuencia (B_1, B, B_k), con $i \in B_1$, $j \in B_k$, $B_1 \cap B \neq \emptyset$ y $B \cap B_k \neq \emptyset$.

Si lo anterior no sucede, deben existir elementos de la colección $B^{(2)}$ que tengan intersección no vacía con algunos de la colección $C^{(1)}$ ya que

$$S=\bigcup_{l\in L} B_l = B_1 \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(1)}} B\right) \cup \left(\bigcup_{B\in B^{(2)}} B\right) \in \mathcal{F},\, B_1 \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(1)}} B\right) \in \mathcal{F},$$

y debe haber intersecciones no vacías entre elementos de $C^{(1)}$ y $B^{(2)}$ para que pueda generarse la coalición factible S (recuérdese que las coaliciones factibles que no sean soportes deben ser uniones de éstos con intersecciones no vacías) y los elementos de $B^{(2)}$ no tienen intersección con B_1 ya que, si lo tuviesen, estarían incluidos en $C^{(1)}$.

Así, teniendo en cuenta cuenta el razonamiento anterior, sea

$$C^{(2)} = \left\{B \in B^{(2)} : B \cap C \neq \emptyset, \text{ para algún } C \in C^{(1)}\right\} \subset B^{(2)},$$

verificándose que

$$B_1 \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(1)}} B\right) \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(2)}} B\right) \in \mathcal{F},$$

y se forma, ahora,

$$B^{(3)} = B^{(2)} \setminus C^{(2)}.$$

Para cada uno de los soportes de $C^{(2)}$, se buscan aquellos elementos de $B^{(3)}$ que tengan intersección no vacía con ellos. Si alguno de los soportes a los que pertenece el elemento j (los cuales están en la colección $B^{(3)}$) tiene intersección no vacía con alguno de los elementos de $C^{(2)}$, el proceso se acaba ya que puede construirse, fácilmente, la secuencia que se indica en el teorema.

Si lo anterior no ocurre, entonces debe haber elementos de la colección $B^{(3)}$ que tengan intersección no vacía con algunos de la colección $C^{(2)}$, ya que

$$S=\bigcup_{l\in L} B_l = B_1 \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(1)}} B\right) \cup \left(\bigcup_{B\in C^{(2)}} B\right) \cup \left(\bigcup_{B\in B^{(3)}} B\right) \in \mathcal{F},$$

$$B_1 \cup \left(\bigcup_{B \in C^{(1)}} B \right) \cup \left(\bigcup_{B \in C^{(2)}} B \right) \in \mathcal{F},$$

y debe haber intersecciones no vacías entre elementos de $C^{(2)}$ y $B^{(3)}$ para que pueda generarse la coalición factible S al no tener los elementos de $B^{(3)}$ intersección con B_1 ni con los elementos de $C^{(1)}$ ya que, de lo contrario, hubiesen estado incluidos en la colección $C^{(1)}$ o bien en $C^{(2)}$.

Es inmediato que el razonamiento descrito anteriormente se puede repetir de forma sucesiva, siendo este proceso finito ya que se van recorriendo todos los elementos de $\{B_l\}_{l \in L}$. Así, se llegará a un paso en el que la intersección con algún soporte que contiene a j sea no vacía (debe de existir por la misma razón que se argumentó al principio de la demostración para que se forme la coalición $S \in \mathcal{F}$). En esta etapa del proceso se termina y puede construirse la secuencia que se indica en el enunciado del teorema. □

Ejemplo 3.20 *Sea* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema de coaliciones factibles* $\cup$*-estable, con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;=\; & \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \\ & \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, N\}. \end{aligned}$$

Considérese la coalición factible $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y los elementos* 1 *y* 5. *Se va a construir una secuencia de soportes* $(B_1, \ldots, B_k)$ *de tal forma que* $1 \in B_1$, $5 \in B_k$ *y, si* $k \geq 2$, $B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset$, $p = 1, \ldots, k-1$.

En primer lugar, obsérvese que la base de $\mathcal{F}$ *está constituida por los siguientes elementos*

$$B(\mathcal{F}) = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\},$$

y que la coalición S *puede expresarse como*

$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6,$$

con $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{3\}$, $B_3 = \{1,2\}$, $B_4 = \{4,5\}$, $B_5 = \{1,2,3\}$ *y* $B_6 = \{3,4,5\}$.

Siguiendo las pautas del procedimiento indicado en la demostración del Teorema 3.19, sean $1 \in B_1$ *y el conjunto* $C^{(1)}$ *formado por todos los* B_i, *distintos de* B_1, *que constituyen la coalición* S *y que tienen intersección no vacía con* B_1. *Es decir, en este caso,* $C^{(1)} = \{B_3, B_5\}$. *Como ninguno de ellos contiene al elemento* 5, *se sigue el proceso.*

Ahora, se consideran los restantes soportes de la colección inicial; es decir, $B^{(2)} = \{B_2, B_4, B_6\}$. *Entonces, se comprueba, para cada uno de los soportes de* $C^{(1)}$, *con cual o cuales elementos de* $B^{(2)}$ *tiene intersección no vacía; esto es,*

$$\textit{Para } B_3 : \; B_3 \cap B_2 = \emptyset, \; B_3 \cap B_4 = \emptyset \textit{ y } B_3 \cap B_6 = \emptyset.$$

$$\textit{Para } B_5 : \; B_5 \cap B_2 \neq \emptyset, \; B_5 \cap B_4 = \emptyset \textit{ y } B_5 \cap B_6 \neq \emptyset.$$

Como $B_5 \cap B_6 \neq \emptyset$ *y* $5 \in B_6$, *el proceso se acaba y puede construirse, la secuencia buscada,*

$$(B_1, B_5, B_6), \quad 1 \in B_1, \quad B_1 \cap B_5 \neq \emptyset, \quad B_5 \cap B_6 \neq \emptyset, \quad 5 \in B_6.$$

Obsérvese que la secuencia construida en el Teorema 3.19 no es única. En el ejemplo expuesto, se puede iniciar el proceso con cualquier soporte que contenga al elemento 1 y, por tanto, se podría aquí haber empezado por el soporte B_5. En ese caso, la secuencia obtenida sería (B_5, B_6). Esto último indica que sería más óptimo empezar con aquel soporte de mayor cardinal que contuviese al elemento en cuestión.

Proposición 3.21 *Sean* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable e* $i, j \in N$, $i \neq j$. *Si existe una secuencia de soportes* $(B_1, \ldots, B_k)$, *de tal forma que* $i \in B_1$, $j \in B_k$ *y, si* $k \geq 2$, $B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset$, $p = 1, \ldots, k-1$, *entonces existe* $S \in \mathcal{F}$ *tal que* $i, j \in S$.

Demostración: Por hipótesis, existe una secuencia de soportes, $(B_1, \ldots, B_k)$, de tal forma que $i \in B_1$, $j \in B_k$ y si $k \geq 2$, $B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset$, $p = 1, \ldots, k-1$. Sea $S = B_1 \cup \ldots \cup B_k$; es suficiente probar que $S \in \mathcal{F}$.

Si $k = 1$, es obvio. Supóngase, por tanto, $k \geq 2$. Aplicando que $(N, \mathcal{F})$ es un sistema $\cup$-estable, se tiene

$$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \;\Rightarrow\; B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}.$$
$$B_2 \cap B_3 \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (B_1 \cup B_2) \cap B_3 \neq \emptyset \;\Rightarrow\; B_1 \cup B_2 \cup B_3 \in \mathcal{F}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento sucesivamente, se tendrá que

$$B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (B_1 \cup \ldots \cup B_p) \cap B_{p+1} \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{p+1} B_i \in \mathcal{F}.$$

Al continuar hasta $p + 1 = k$, resulta que $i \in B_1$, $j \in B_k$ y

$$S = B_1 \cup \ldots \cup B_k \in \mathcal{F}.$$

Por lo tanto se tiene que, ambos elementos i, j pertenecen a una misma coalición factible. $\square$

Como consecuencias inmediatas de los resultados anteriores, pueden establecerse las siguientes conclusiones.

Corolario 3.22 *Sean $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable, $S \in \mathcal{F}$, $i, j \in N$, $i \neq j$. Los elementos i, j pertenecen a la coalición factible S si y sólo si el grafo (Q, A), donde*

$$Q = \{B_l : B_l \in B(\mathcal{F}),\ B_l \subseteq S\},$$

$$A = \{(B_p, B_h) : B_p \cap B_h \neq \emptyset,\ B_p \neq B_h\} \subseteq Q \times Q,$$

y tal que $i \in B_m$, $j \in B_k$, con $B_m, B_k \in Q$, es un grafo conexo.

Corolario 3.23 *Sea* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable. Dos elementos* $i, j \in N$*,* $i \neq j$*, pertenecen a la misma* $\mathcal{F}$*-componente de* N *si y sólo si existe una secuencia de soportes,* $(B_1, \ldots, B_k)$*, de tal forma que* $i \in B_1$*,* $j \in B_k$ *y, si* $k \geq 2$*,* $B_p \cap B_{p+1} \neq \emptyset$*, para* $p = 1, \ldots, k-1$*.*

Además, obsérvese que la Proposición 3.12 permite reformular el Teorema 3.19, y el Corolario 3.23 para soportes no unitarios.

Myerson [54] introdujo el término *conferencia* para referirse a cualquier conjunto, de dos o más jugadores, que pueden reunirse para discutir sus planes de cooperación. Así, una *estructura de conferencias* en N, denotada por $\mathcal{Q}$, es cualquier colección de conferencias; es decir,

$$\mathcal{Q} = \{S : S \subseteq N,\ |S| \geq 2\}.$$

Dada una estructura de conferencias $\mathcal{Q}$, Myerson definió el concepto de *conexión* entre dos jugadores de la siguiente forma: dos jugadores i y j están conectados por $\mathcal{Q}$ si $i = j$ o existe alguna secuencia de conferencias, $(S_1, \ldots, S_k)$, tal que

$$\begin{aligned} &i \in S_1,\ j \in S_k,\ \{S_1, \ldots, S_k\} \subseteq \mathcal{Q}, \\ &S_p \cap S_{p+1} \neq \emptyset \text{ para } p = 1, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Claramente, el concepto de conexión entre dos jugadores es una relación binaria que implica una partición del conjunto N (admitiendo que todo elemento de N pertenece a alguna conferencia), denotada por $N/\mathcal{Q}$, en la que cada clase de equivalencia está constituida por todos los elementos que están conectados entre sí.

Los anteriores resultados permiten establecer una relación estrecha entre los sistemas $\cup$-estables y las estructuras de conferencias de Myerson. En efecto, dado un sistema $(N, \mathcal{F})$ estable para la unión, el conjunto constituido por los soportes no unitarios constituye una estructura de conferencias de Myerson. El Corolario 3.23 (admitiendo que todo elemento de N pertenece a algún soporte no unitario) permite indicar que, para la estructura de conferencias considerada, los elementos de $N/\mathcal{Q}$ a que da lugar la definición de conexión son, precisamente, las $\mathcal{F}$-componentes de N.

Recíprocamente, dada una estructura de conferencias de Myerson, $\mathcal{Q}$, puede introducirse la siguiente definición de coalición factible: la coalición $S \subseteq N$ es factible en $\mathcal{Q}$ si, para todo $i, j \in S$, existe una secuencia de conferencias $(S_1, \ldots, S_k)$, $S_p \subseteq S$ tal que $i \in S_1$, $j \in S_k$ y, si $k \geq 2$, $S_p \cap S_{p+1} \neq \emptyset$ para $p = 1, \ldots, k-1$. Entonces, puede demostrarse que $(N, \mathcal{F})$ con

$$\mathcal{F} = \{S \subseteq N : S \text{ es factible en } \mathcal{Q}\},$$

es un sistema $\cup$-estable. En efecto, se ha de probar que si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, entonces $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Para ello, sean $i, j \in F_1 \cup F_2$. Si ambos están en F_1 o en F_2, es evidente. Supóngase que $i \in F_1$, $j \in F_2$, $i, j \notin F_1 \cap F_2$. Como $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, existe $k \in F_1 \cap F_2$, $k \neq i, j$. Por tanto, $k, i \in F_1$ y al ser $F_1 \in \mathcal{F}$ existe una secuencia de conferencias, $(S_1, \ldots, S_p)$, con $i \in S_1$, $k \in S_p$ y tal que $S_h \subseteq F_1$, $S_h \cap S_{h+1} \neq \emptyset$, para todo $h = 1, \ldots, p-1$. Además, $k, j \in F_2$ y $F_2 \in \mathcal{F}$, con lo cual existe otra secuencia $(S_{p+1}, \ldots, S_t)$ con $k \in S_{p+1}$, $j \in S_t$, $S_h \subseteq F_2$, y tal que $S_h \cap S_{h+1} \neq \emptyset$, para todo $h = p+1, \ldots, t-1$. De aquí, se deduce que existe la secuencia $(S_1, S_2 \ldots, S_p, S_{p+1}, \ldots, S_t)$ con $i \in S_1$, $j \in S_t$ y $S_h \subseteq F_1 \cup F_2$, $S_h \cap S_{h+1} \neq \emptyset$, para todo $h = 1, \ldots, t-1$. Por tanto, $F_1 \cup F_2$ es factible en $\mathcal{Q}$ y, entonces, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Por último, habría que indicar que, aunque se ha establecido una relación entre sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables, $(N, \mathcal{F})$, y las estructuras de conferencias de Myerson, ésta no es una relación biunívoca. Es decir, a partir de $(N, \mathcal{F})$ se pueden seleccionar otras estructuras de conferencias diferentes a la considerada en el razonamiento anterior y, por otro lado, a partir de una estructura de conferencias $\mathcal{Q}$, pueden establecerse otras definiciones de coalición factible en $\mathcal{Q}$ que dan lugar a diferentes sistemas de coaliciones $\cup$-estables.

La prueba del Teorema 3.19, sugiere la creación de un algoritmo para la construcción de una secuencia de soportes que se contempla en su enunciado. Para ello, puede seguirse una técnica análoga a la de *búsqueda en amplitud* (Breadth First Search algorithm) en grafos [50].

En lo que queda de la sección, se describe dicho algoritmo y se ejemplifica su funcionamiento.

Considérense $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y $S \in \mathcal{F}$. En el algoritmo que sigue, para cada B_p soporte contenido en S, se denotará por $A(B_p)$ al conjunto

$$\{B \in B\,(\mathcal{F}) : B \subseteq S,\ \text{con } B \neq B_p \text{ y } B \cap B_p \neq \emptyset\}.$$

Entrada: Todos los soportes contenidos en S: $\{B_l\}_{l \in L}$, $i, j \in S$

Algoritmo:

Paso 1:

Marca los elementos $\{B_l\}_{l \in L}$ como *no visitados*

Elige un B_k, con $i \in B_k$

Visitar B_k

Poner B_k en una cola Q

Si $j \in B_k$ entonces $Q = \emptyset$

Paso 2:

Repetir mientras $Q \neq \emptyset$

$B_p \longleftarrow$ cabecera$[Q]$

Determinar $A(B_p)$ y para cada $B_h \in A(B_p)$:

Si B_h no está visitado:

marca B_h *visitado*

introduce B_h en Q

Borra B_p de Q

Si $j \in B_h \in Q$, entonces $Q = \emptyset$

Salida: Los diferentes soportes que, de forma ordenada o sucesiva, son introducidos en Q como resultado de procesar cada soporte B_p hasta que $Q = \emptyset$.

El grafo (Q, A), donde Q es el conjunto de soportes correspondientes a la salida del algoritmo anterior y $A = \{(B_k, B_h) : B_k \cap B_h \neq \emptyset,\ B_k \neq B_h\}$, proporciona diferentes caminos que llevan de i a j y, con ello, se obtienen una o varias secuencias que verifican la tesis del teorema.

Los $A(B_i)$ recorrerán, a lo sumo, todos los soportes $\{B_l\}_{l\in L}$ y, además, $A(B_i) \neq \emptyset$ debido a la $\cup$-estabilidad del sistema $(N, \mathcal{F})$ y a la formación de las coaliciones factibles mediante uniones de soportes con intersección no vacía.

El siguiente ejemplo muestra la colección de soportes que se obtiene aplicando el algoritmo anterior.

Ejemplo 3.24 *Considérense el sistema $\cup$-estable, $(N, \mathcal{F})$, del ejemplo anterior y la coalición $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $i = 1, j = 5$. Se tiene que*

$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6,$$

con $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{3\}$, $B_3 = \{1, 2\}$, $B_4 = \{4, 5\}$, $B_5 = \{1, 2, 3\}$ y $B_6 = \{3, 4, 5\}$. Aplicando el algoritmo se tiene,

Entrada: $\{B_l\}_{l=1}^{6}$, $1, 5 \in S$

Algoritmo:

Paso 1:

Marca los elementos $\{B_l\}_{l=1}^{6}$ como no visitados

Elige un $B_k = B_1$ con $1 \in B_k$

Visitar B_1

$Q = [B_1]$

$5 \notin B_1$

Paso 2:

$Q = [B_1] \neq \emptyset$

$B_1 \longleftarrow$ *cabecera*$[Q]$

$A(B_1) = \{B_3, B_5\}$

marca B_3, B_5 visitados

$Q = [B_1, B_3, B_5]$

Borra B_1 *de* Q

$5 \notin B_3, 5 \notin B_5$

Paso 2:

$Q = [B_3, B_5] \neq \emptyset$

$B_3 \longleftarrow$ *cabecera*$[Q]$

$A(B_3) = \{B_1, B_5\}$

B_1, B_5 *están visitados:*

$Q = [B_3, B_5]$

Borra B_3 *de* Q

Paso 2:

$Q = [B_5] \neq \emptyset$

$B_5 \longleftarrow$ *cabecera*$[Q]$

$A(B_5) = \{B_1, B_2, B_3, B_6\}$

B_2, B_6 *no están visitados:*

marca B_2, B_6 visitados

$Q = [B_5, B_2, B_6]$

Borra B_5 *de* Q

$5 \in B_6 \in Q$ *entonces* $Q = \emptyset$

Salida: $[B_1, B_3, B_5, B_2, B_6]$.

El grafo (Q, A) *cuyo conjunto de vértices viene dado por*

$$Q = \{B_1, B_3, B_5, B_2, B_6\}$$

y el conjunto de aristas por

$$A = \{(B_k, B_h) : B_k \cap B_h \neq \emptyset,\ B_k \neq B_h\},$$

que aparece en la Figura 3.1, da lugar a diferentes caminos que llevan de 1 *a* 5.

Obsérvese que el algoritmo anterior sólo garantiza la existencia de una o varias secuencias de soportes que cumplen las condiciones anteriormente citadas. Sin embargo, en general, no proporciona la secuencia con menor número de soportes que va de i a j. Para ello, se podrían adaptar alguno de los algoritmos que calculan el camino más corto entre dos vértices cualesquiera de un grafo.

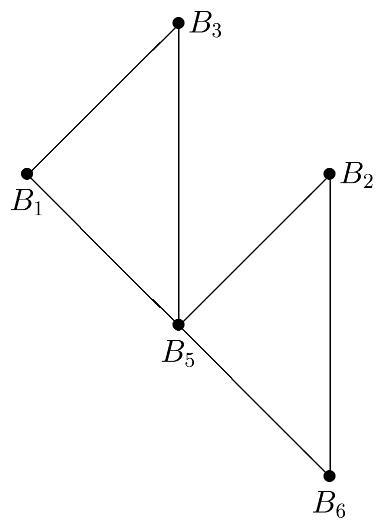

FIGURA 3.1

3.2 El valor de Myerson generalizado: propiedades y axiomas

Una vez estudiado el concepto de base de un sistema $(N, \mathcal{F})$ estable para la unión, se comienza, esta nueva sección, recordando el concepto de juego restringido por un sistema $\cup$-estable, introducido en el segundo capítulo para, a continuación, estudiar un nuevo concepto de solución en estructuras de cooperación estables para la unión: el *valor de Myerson generalizado*. Este concepto, el cual va a asociar a cada estructura de cooperación $(N, v, \mathcal{F})$ un único vector de pagos para los jugadores, se definirá a partir del valor de Shapley del correspondiente juego restringido.

Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. La función característica correspondiente al juego restringido por la familia $\mathcal{F}$, viene determinada de la siguiente forma

$$v^{\mathcal{F}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} \sum\limits_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) & \text{si } C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 3.25 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. El valor de Myerson generalizado asociado a $(N, v, \mathcal{F})$, denotado por $\mu(N, v, \mathcal{F})$, está definido por*

$$\mu(N, v, \mathcal{F}) = \Phi\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Obsérvese que si se tiene en cuenta el Ejemplo 2.5, el concepto introducido generaliza el valor de Myerson (véase pág. 23) definido sólo en situaciones de comunicación.

A partir de ahora, dado el sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{F})$, se denotará por $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{F}$. En el siguiente ejemplo se obtiene el valor de Myerson asociado a una estructura de cooperación estable para la unión.

Ejemplo 3.26 *Considérese el conjunto de jugadores* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y el sistema estable para la unión dado por* $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, N\}$. *Sea* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por* $v(S) = |S| - 1$, *para toda coalición no vacía. Entonces,*

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\}.$$

En este caso, el juego restringido está definido por

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} |S| - 1 & \textit{si } S \in \mathcal{F}, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor de Myerson generalizado, $\mu(N, v, \mathcal{F})$, *viene dado por*

$$\begin{aligned}
\mu_1(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : 1 \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{1\})\right] = \frac{5}{12}, \\
\mu_2(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : 2 \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{2\})\right] = \frac{13}{12}, \\
\mu_3(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : 3 \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{3\})\right] = \frac{13}{12}, \\
\mu_4(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : 4 \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{4\})\right] = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Así, $\mu(N, v, \mathcal{F}) = \left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{5}{12}\right)$.

Con el fin de analizar las características del valor de Myerson generalizado, se introducen progresivamente, y siguiendo la terminología de Myerson, el concepto de *regla de asignación* y algunas propiedades de las mismas.

Para ello, fijado un conjunto finito $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, se denotará por SE^N al conjunto de todas las estructuras de cooperación estables para la unión que tienen a N como conjunto de jugadores. Es decir,

$$SE^N = \{(N, v, \mathcal{F}) : (N, \mathcal{F}) \text{ es } \cup\text{-estable y } (N, v) \text{ un juego cooperativo}\}.$$

Definición 3.27 *Una regla de asignación es una función* $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$(N, v, \mathcal{F}) \longmapsto (\gamma_1 (N, v, \mathcal{F}), \gamma_2 (N, v, \mathcal{F}), \ldots, \gamma_n (N, v, \mathcal{F})),$$

tal que verifique

1. $\forall (N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$, $\forall M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $\quad \sum_{k \in M} \gamma_k (N, v, \mathcal{F}) = v(M)$.
2. $\forall i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$, $\quad \gamma_i (N, v, \mathcal{F}) = 0$.

Es decir, una regla de asignación es una función que, a cada estructura de cooperación estable para la unión definida sobre N, le asigna un vector n-dimensional, que es *eficiente* para las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición N y que asocia un valor nulo a aquellos jugadores que no pertenecen a ninguna coalición factible maximal.

Definición 3.28 *Una regla de asignación,* $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *es justa si*

$$\forall (N, v, \mathcal{F}) \in SE^N,\ \forall B \in \mathcal{B},\ \forall j \in B,\ \gamma_j (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_j (N, v, \mathcal{F}') = c,$$

donde $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \{B\}}$ *y* $c \in \mathbb{R}$.

Así, si una regla de asignación es justa, todos los jugadores que pertenecen a un mismo soporte B pierden o ganan la misma cantidad si este soporte B es eliminado de la estructura de cooperación.

Myerson (1977) [53] demostró, en el conjunto de situaciones de comunicación, que el valor de Myerson es la única regla de asignación justa. A continuación, se probará un resultado similar en estructuras de cooperación estables para la unión. La demostración se inspira en las técnicas utilizadas por Myerson (1977) [53], (1980) [54].

Teorema 3.29 *El valor de Myerson generalizado* $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es la única regla de asignación justa.*

Demostración: La prueba del teorema consta de dos partes. En primer lugar, se demuestra que hay una única regla de asignación justa. En segundo lugar, se prueba que el valor de Myerson generalizado es una regla de asignación justa.

(1) Unicidad. Supóngase que $\gamma^1 : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma^2 : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dos reglas de asignación justas.

Considérese el conjunto SE^N. Cada sistema de coaliciones $\cup$-estable tiene asociada una única base, luego los elementos del conjunto SE^N se pueden clasificar atendiendo al número de soportes no unitarios que tenga su base asociada. Con ello, se tendría una partición del conjunto SE^N.

Utilizando esta partición introducida en el conjunto SE^N, se prueba, por inducción sobre el número de soportes no unitarios que tengan las bases, que $\gamma^1 = \gamma^2$.

En efecto, sea $(N, \mathcal{F})$ cualquier sistema de coaliciones factibles $\cup$-estable que no tenga ningún soporte no unitario. Entonces, las únicas coaliciones pertenecientes a $\mathcal{F}$, son unitarias y constituyen su base, luego

$$C_{\mathcal{F}}(N) = \{\{i\} : \{i\} \in \mathcal{F}\}$$

y, como γ^1 y γ^2 son eficientes,

$$\gamma_i^1 (N, v, \mathcal{F}) = v(\{i\}) = \gamma_i^2 (N, v, \mathcal{F}), \text{ para todo } i \in N \text{ tal que } \{i\} \in \mathcal{F}.$$

Además, para los demás elementos $i \in N$ tal que $\{i\} \notin \mathcal{F}$ se tiene que

$$\gamma_i^1 (N, v, \mathcal{F}) = 0 = \gamma_i^2 (N, v, \mathcal{F}),$$

ya que no pertenecen a ninguna coalición factible maximal. Luego, finalmente resulta que $\gamma^1 = \gamma^2$.

Supóngase, ahora, que la regla de asignación justa es única para cualquier sistema de coaliciones factibles $\cup$-estables cuyo número de soportes no unitarios sea $k-1$. Se probará la unicidad de γ para sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables cuyo número de soportes no unitarios sea k.

Considérese el conjunto $C_{\mathcal{F}}(N)$ de las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición N. Si γ^1 y γ^2 son reglas de asignación, es inmediato que

$$\gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) = 0 = \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}), \text{ para todo } i \in N, \text{ tal que } i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M,$$

$$\gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) = v(\{i\}) = \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}), \text{ para todo } i \in N, \text{ con } \{i\} \in C_{\mathcal{F}}(N).$$

Por tanto, es suficiente considerar aquellos jugadores pertenecientes a las diferentes $\mathcal{F}$-componentes de N que no sean coaliciones factibles unitarias. Sea, entonces, $B \in \mathcal{B}$ un soporte no unitario. Por hipótesis de inducción

$$\gamma^1(N,v,\mathcal{F}') = \gamma^2(N,v,\mathcal{F}'), \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \{B\}}$, y como γ^1 y γ^2 son reglas de asignación justas, se verifica que, para todo $i \in B$,

$$\begin{aligned} \gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) - \gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}') &= c_1, \\ \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}) - \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}') &= c_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Utilizando la igualdad (3.1) y restando miembro a miembro en (3.2), se obtiene

$$\gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) - \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}) = c_3, \quad \forall i \in B, \quad \forall B \in \mathcal{B}, \text{ con } |B| \geq 2. \tag{3.3}$$

Ahora bien, considérese $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $|M| \geq 2$. Puesto que γ^1 y γ^2 son reglas eficientes en las $\mathcal{F}$-componentes, se tiene

$$\sum_{i \in M} \gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) = v(M) = \sum_{i \in M} \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F}),$$

y, de ahí,

$$\sum_{i \in M} \left[\gamma_i^1(N,v,\mathcal{F}) - \gamma_i^2(N,v,\mathcal{F})\right] = 0.$$

Por otro lado, el Corolario 3.23 indica que, dados dos elementos cualesquiera j, k de la coalición factible maximal M, existe una secuencia de soportes no unitarios contenidos en M, $(B_1, B_2, \ldots, B_p)$, de tal forma que $j \in B_1$, $k \in B_p$ y $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, \ldots, p-1$. Entonces, aplicando este corolario junto con la condición (3.3), se tiene que, para $j \in B_1$,

$$\gamma_j^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_j^2 (N, v, \mathcal{F}) = c_3,$$

y, al ser $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, existe un elemento $h \in B_1 \cap B_2$ con lo que

$$\gamma_j^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_j^2 (N, v, \mathcal{F}) = c_3 = \gamma_h^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_h^2 (N, v, \mathcal{F}),$$

ya que $h \in B_1$. Reiterando el razonamiento para todos los elementos de la secuencia, $(B_1, B_2, \ldots, B_p)$, se llega de inmediato, a que

$$\gamma_j^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_j^2 (N, v, \mathcal{F}) = \gamma_k^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_k^2 (N, v, \mathcal{F}).$$

Luego, para todo elemento $i \in M$, con $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, resulta

$$\gamma_i^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_i^2 (N, v, \mathcal{F}) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ello quiere decir que,

$$\sum_{i \in M} \left[\gamma_i^1 (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_i^2 (N, v, \mathcal{F})\right] = 0 = |M|\, c,$$

lo que implica que $c = 0$ y, así, $\gamma_i^1 (N, v, \mathcal{F}) = \gamma_i^2 (N, v, \mathcal{F})$, para cualquier elemento $i \in M$. Por tanto, se tiene que $\gamma^1 = \gamma^2$.

(2) El valor de Myerson generalizado es una regla de asignación justa.

Para probar que es una regla de asignación, habrá que demostrar que se verifican las condiciones

1. $\forall (N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$, $\forall M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $\quad \sum_{i \in M} \mu_i (N, v, \mathcal{F}) = v(M)$.
2. $\forall i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$, $\quad \mu_i (N, v, \mathcal{F}) = 0$.

La segunda condición es inmediata ya que si un elemento $i \in N$ no pertenece a la unión de las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición N, ello quiere decir que no pertenece a ninguna coalición factible de $\mathcal{F}$. Por tanto, para cada $S \in \mathcal{F}$,

$$C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}),$$

y, aplicando la definición de valor de Myerson generalizado,

$$\begin{aligned} \mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}) \right] \\ &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S)\, 0 = 0. \end{aligned}$$

Para probar la primera condición, si $N \in \mathcal{F}$, entonces N es la única $\mathcal{F}$-componente y, de ahí,

$$\sum_{i \in N} \mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = v^{\mathcal{F}}(N) = v(N).$$

Supóngase, ahora, que $N \notin \mathcal{F}$ y, considérense las $\mathcal{F}$-componentes de la coalición N. A cada $\mathcal{F}$-componente M de N, se le asocia un juego u^M, definido de la siguiente forma

$$u^M : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u^M(T) = v^{\mathcal{F}}\left(T \cap M\right) = \sum_{R \in C_{\mathcal{F}}(T \cap M)} v(R), \ \ \forall T \subseteq N.$$

Por la Proposición 3.17, para cualquier coalición $T \subseteq N$, se verifica la igualdad

$$C_{\mathcal{F}}(T) = \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} C_{\mathcal{F}}(T \cap M).$$

Por tanto, es inmediato que

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} u^M,$$

ya que, para toda $T \subseteq N$,

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}}(T) &= \sum_{R \in C_{\mathcal{F}}(T)} v(R) \\ &= \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} \left[\sum_{R \in C_{\mathcal{F}}(T \cap M)} v(R) \right] \\ &= \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} u^M(T). \end{aligned}$$

Esta descomposición del juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ será fundamental en la demostración de la eficiencia en las $\mathcal{F}$-componentes. Para probarla, sea $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$. Teniendo en cuenta la descomposición anterior y la linealidad del valor de Shapley, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M} \mu_i (N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{i \in M} \Phi_i \left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \\ &= \sum_{i \in M} \Phi_i \left(N, \sum_{L \in C_{\mathcal{F}}(N)} u^L\right) \\ &= \sum_{i \in M} \left[\sum_{L \in C_{\mathcal{F}}(N)} \Phi_i(N, u^L) \right] \\ &= \sum_{L \in C_{\mathcal{F}}(N)} \left[\sum_{i \in M} \Phi_i \left(N, u^L\right) \right] \\ &= \sum_{i \in M} \Phi_i(N, u^M) + \sum_{\{L \in C_{\mathcal{F}}(N) : L \neq M\}} \left[\sum_{i \in M} \Phi_i(N, u^L) \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ahora bien, se probará que

$$\sum_{i \in M} \Phi_i(N, u^M) = v^{\mathcal{F}}(M), \tag{3.5}$$

y que, para cada $i \in M$,

$$\Phi_i(N, u^L) = 0, \text{ para } L \in C_{\mathcal{F}}(N),\ L \neq M. \tag{3.6}$$

Para probar (3.5), nótese que la coalición factible maximal M es un soporte, en el sentido de Shapley, para el juego u^M; esto es,

$$u^M(T) = u^M(T \cap M).$$

En efecto, para cualquier $T \subseteq N$, se tiene por definición

$$u^M(T) = v^{\mathcal{F}}(T \cap M) = v^{\mathcal{F}}((T \cap M) \cap M) = u^M(T \cap M).$$

Aplicando las propiedades del valor de Shapley, (véanse págs. 12 y 13), se obtiene

$$\sum_{i \in M} \Phi_i(N, u^M) = u^M(M) = v^{\mathcal{F}}(M).$$

Además, si $L \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $L \neq M$, entonces $L \cap M = \emptyset$ y, utilizando la expresión del valor de Shapley, para $i \in M$,

$$\begin{aligned}
\Phi_i(N, u^L) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[u^L(S \cup \{i\}) - u^L(S)\right] \\
&= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}((S \cup \{i\}) \cap L) - v^{\mathcal{F}}(S \cap L)\right] \\
&= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}((S \cap L) \cup (\{i\} \cap L)) - v^{\mathcal{F}}(S \cap L)\right] \\
&= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}((S \cap L) \cup \emptyset) - v^{\mathcal{F}}(S \cap L)\right] \\
&= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S \cap L) - v^{\mathcal{F}}(S \cap L)\right] \\
&= \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S)\, 0 = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando las expresiones (3.4), (3.5) y (3.6), se obtiene

$$\sum_{i \in M} \mu_i\,(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{i \in M} \Phi_i\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) = v^{\mathcal{F}}(M) = v(M).$$

Luego, $\mu\,(N, v, \mathcal{F})$ es una regla de asignación.

Por último, se prueba que es justa. Usando la definición de valor de Myerson generalizado, esto es equivalente a demostrar que

$$\Phi_k\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) - \Phi_k\left(N, v^{\mathcal{F}'}\right) = c, \quad \forall k \in B, \;\; c \in \mathbb{R},$$

donde $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \{B\}}$.

Para ello, se define el juego (N, w) tal que

$$w(S) = v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}'}(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

El juego (N, w) está bien definido ya que $(N, \mathcal{F})$ y $(N, \mathcal{F}')$ son sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables y, por tanto, tiene sentido considerar el valor de Shapley del juego w. Para cada $k \in B$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi_k(N, w) &= \sum_{\{S \subseteq N:\, k \in S\}} \gamma(S)[w(S) - w(S \setminus \{k\})] \\
&= \sum_{\{S:\, k \in S,\, B \subseteq S\}} \gamma(S)[w(S) - w(S \setminus \{k\})] \\
&+ \sum_{\{S:\, k \in S,\, B \not\subseteq S\}} \gamma(S)[w(S) - w(S \setminus \{k\})].
\end{aligned}$$

Si $S \subseteq N$ es tal que $B \not\subseteq S$, entonces $w(S) = 0$. En efecto, por definición

$$w(S) = v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}'}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) - \sum_{T' \in C_{\mathcal{F}'}(S)} v(T').$$

Ahora bien, por el apartado (b) de la Proposición 3.18, las $\mathcal{F}$-componentes de S y las $\mathcal{F}'$-componentes de S son las mismas. Como consecuencia, se tiene

$$w(S) = 0, \text{ para todo } S \subseteq N, \text{ tal que } B \not\subseteq S.$$

Además, para toda coalición $S \subseteq N$, al ser $k \in B$, se tiene que $B \not\subseteq S \setminus \{k\}$ y así $w(S \setminus \{k\}) = v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{k\}) - v^{\mathcal{F}'}(S \setminus \{k\}) = 0$.

Por tanto, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\Phi_k(N, w) &= \sum_{\{S:\, k \in S,\, B \subseteq S\}} \gamma(S)[w(S) - w(S \setminus \{k\})] \\
&= \sum_{\{S:\, B \subseteq S\}} \gamma(S) w(S).
\end{aligned}$$

Entonces, el valor $\Phi_k(N,w)$ es una suma extendida a todas aquellas coaliciones que contienen a todos los elementos del soporte B. Aplicando el mismo razonamiento a cualquier otro elemento $p \in B$ o bien aplicando el axioma de simetría del valor de Shapley, resulta

$$\Phi_k(N,w) = \Phi_p(N,w), \quad \forall k,p \in B.$$

Finalmente, por la linealidad del valor de Shapley

$$\Phi_k(N,w) = \Phi_k\left(N, v^{\mathcal{F}} - v^{\mathcal{F}'}\right) = \Phi_k\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) - \Phi_k\left(N, v^{\mathcal{F}'}\right),$$

$$\Phi_p(N,w) = \Phi_p\left(N, v^{\mathcal{F}} - v^{\mathcal{F}'}\right) = \Phi_p\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) - \Phi_p\left(N, v^{\mathcal{F}'}\right),$$

y la propiedad queda demostrada. □

Myerson (1977) [53] probó que si el juego (N,v) era superaditivo, entonces el valor de Myerson era, además, una regla de asignación estable en el conjunto de situaciones de comunicación. Este resultado se puede generalizar a estructuras de cooperación estables para la unión.

Definición 3.30 *Una regla de asignación, $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es estable si*

$$\forall\,(N,v,\mathcal{F}) \in SE^N,\ \forall B \in \mathcal{B},\ \forall j \in B,\ \gamma_j\,(N,v,\mathcal{F}) \geq \gamma_j\,(N,v,\mathcal{F}'),$$

siendo $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \{B\}}$.

Esta condición asegura que todos los jugadores de cualquier soporte siempre se benefician de llegar a un acuerdo y cooperar, si se consideran juegos de ganancias.

Teorema 3.31 *Sea $(N,v,\mathcal{F}) \in SE^N$ tal que (N,v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces el valor de Myerson generalizado $\mu\,(N,v,\mathcal{F})$ es una regla de asignación justa y estable.*

Demostración: En el teorema anterior se ha demostrado que el valor de Myerson generalizado es la única regla de asignación justa. Se ha de probar, ahora, que es estable; es decir, para todo $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ tal que (N, v) es superaditivo y cero-normalizado y para cualesquiera $B \in \mathcal{B}$, y $j \in B$, se verifica que

$$\Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \geq \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}'}\right).$$

Esto es equivalente a probar que $\Phi_j(N, w) \geq 0$, para $j \in B$, siendo $B \in \mathcal{B}$, y $w = v^{\mathcal{F}} - v^{\mathcal{F}'}$.

Para cada $k \in B$, se ha probado en el teorema anterior que

$$\Phi_k(N, w) = \sum_{\{S\colon B \subseteq S\}} \gamma(S) w(S),$$

luego, será suficiente probar que $w(S) \geq 0$, para cualquier coalición $S \subseteq N$ tal que $B \subseteq S$.

Para ello, se prueba que cualquier coalición factible maximal de S en $(N, \mathcal{F}')$, con $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \{B\}}$, es una coalición factible maximal de S en $(N, \mathcal{F})$ o está contenida en una $\mathcal{F}$-componente de S. En efecto, sea $T' \in C_{\mathcal{F}'}(S)$. Entonces, $T' \in \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, $T' \subseteq S$. Por tanto, T' es una coalición factible en $\mathcal{F}$ y, o bien es una coalición factible maximal de S en $\mathcal{F}$ o está contenida en una única $\mathcal{F}$-componente de S ya que éstas son disjuntas entre sí. Entonces, agrupando las $\mathcal{F}'$-componentes de S que están contenidas en una misma $\mathcal{F}$-componente de S, y teniendo en cuenta que el juego (N, v) es superaditivo y cero-normalizado (lo que implica monotonía), se tiene que

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}'}(S) &= \sum_{T' \in C_{\mathcal{F}'}(S)} v(T') \\ &= \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} \left[\sum_{T' \subseteq T} v(T')\right] \\ &\leq \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} \left[v\left(\bigcup_{T' \subseteq T} T'\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) \\ &= v^{\mathcal{F}}(S). \end{aligned}$$

Así, $w(S) \geq 0$, para cada $S \subseteq N$ tal que $B \subseteq S$. $\square$

El hecho de que el valor de Myerson generalizado sea una regla de asignación implica, de forma inmediata, que constituye siempre una preimputación para el juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. En efecto, para cualquier estructura de cooperación estable para la unión,

$$\sum_{i \in N} \mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} \left[\sum_{i \in M} \mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right)\right] = \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} v(M) = v^{\mathcal{F}}(N).$$

Además, si el juego (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, el Teorema 2.14 asegura que el juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ posee las mismas características. Por tanto, para todo $i \in N$, se verifica que $\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) \geq 0 = v^{\mathcal{F}}\left(\{i\}\right)$ y, de ahí, $\mu\left(N, v, \mathcal{F}\right) \in I\left(v^{\mathcal{F}}\right)$.

Sin embargo, no es inmediato que el valor de Myerson generalizado pertenezca al core del juego restringido. Una condición suficiente se indica en el siguiente resultado.

Teorema 3.32 *Sean $(N, \mathcal{F})$ una familia intersectante y (N, v) un juego cero-normalizado. Si (N, v) es convexo, entonces $\mu\left(N, v, \mathcal{F}\right) \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$.*

Demostración: Si (N, v) es convexo, aplicando el Teorema 2.20, resulta que el juego restringido lo es. Si se tiene en cuenta que el valor de Shapley pertenece al core del juego si éste es convexo [71], entonces, es inmediato que $\mu\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \Phi\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$. $\square$

Nótese que, al igual que se analizó en el capítulo anterior, la hipótesis de que el juego (N, v) sea cero-normalizado puede omitirse en el caso de ser factible cualquier coalición unitaria.

Definición 3.33 *Una regla de asignación, $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, satisface la fórmula de Shapley si, para todo $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ y todo $i \in N$, se verifica*

$$\gamma_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{j \in N} \gamma_j (N, v, \mathcal{F}_S) - \sum_{j \in N} \gamma_j \left(N, v, \mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}\right) \right],$$

donde, para cada $S \subseteq N$,

$$\gamma(S) = \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \quad y \quad \mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq S\}.$$

Teorema 3.34 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la fórmula de Shapley.*

Demostración: Teniendo en cuenta la definición de $\mu_i (N, v, \mathcal{F})$ y del juego restringido, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, resulta que

$$\begin{aligned} \mu_i (N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}} (S) - v^{\mathcal{F}} (S \setminus \{i\}) \right] \\ &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) - \sum_{T' \in C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})} v(T') \right] \\ &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{T \in C_{\mathcal{F}_S}(N)} v(T) - \sum_{T' \in C_{\mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}}(N)} v(T') \right], \end{aligned}$$

ya que, por la Proposición 3.16,

$$C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}_S}(N) \ \text{ y } C_{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}) = C_{\mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}}(N).$$

Por tanto, como μ es una regla de asignación en SE^N, se tiene que el valor de $\mu_i (N, v, \mathcal{F})$ es

$$\sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{T \in C_{\mathcal{F}_S}(N)} \sum_{j \in T} \Phi_j \left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right) - \sum_{T' \in C_{\mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}}(N)} \sum_{j \in T'} \Phi_j \left(N, v^{\mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}}\right) \right],$$

y, puesto que las asignaciones a los jugadores que no pertenecen a ninguna coalición factible maximal son nulas, se puede escribir que

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{j \in N} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right) - \sum_{j \in N} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_{S\setminus\{i\}}}\right) \right].$$

En consecuencia, se ha obtenido que

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[\sum_{j \in N} \mu_j(N, v, \mathcal{F}_S) - \sum_{j \in N} \mu_j\left(N, v, \mathcal{F}_{S\setminus\{i\}}\right) \right].$$

□

Nótese que, en la demostración, se obvia el caso de ser $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$ para algunas coaliciones $S \subseteq N$ ya que, en esta circunstancia, $C_{\mathcal{F}_S}(N) = \emptyset$ y, por tanto,

$$v^{\mathcal{F}}(S) = 0 = \sum_{j \in N} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right).$$

También, puede observarse que la fórmula de Shapley coincide con la expresión clásica de la misma cuando la cooperación es universal; es decir, si $\mathcal{F} = 2^N$. En efecto,

$$\sum_{j \in N} \mu_j(N, v, \mathcal{F}_S) = \sum_{j \in N} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right)$$

donde, en este caso particular, $\mathcal{F}_S = 2^S$. Entonces, para cada $T \subseteq N$, se verifica,

$$\begin{aligned} v^{\mathcal{F}_S}(T) &= \sum_{R \in C_{\mathcal{F}_S}(T)} v(R) \\ &= v(T \cap S) \\ &= v^{\mathcal{F}_S}(T \cap S). \end{aligned}$$

Luego, S es un soporte en el sentido de Shapley para el juego $v^{\mathcal{F}_S}$ y, de ahí,

$$\sum_{j \in N} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right) = \sum_{j \in S} \Phi_j\left(N, v^{\mathcal{F}_S}\right)$$

$$\begin{aligned} &= v^{\mathcal{F}_S}(S) \\ &= v(S). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\sum_{j \in N} \Phi_j \left(N, v^{\mathcal{F}_{S \setminus \{i\}}}\right) = v(S \setminus \{i\}),$$

y, por tanto, la fórmula de Shapley indicada en la Definición 3.33 se corresponde con el valor de Shapley del juego (N, v); es decir,

$$\Phi_i (N, v) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right].$$

Definición 3.35 *Una regla de asignación, $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tiene contribuciones equilibradas si, para todo $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ y cualesquiera $i, j \in N$, se verifica*

$$\gamma_i (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_i (N, v, \mathcal{F}_{-j}) = \gamma_j (N, v, \mathcal{F}) - \gamma_j (N, v, \mathcal{F}_{-i}),$$

donde el sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{F}_{-i})$ está definido por $\{F \in \mathcal{F} : i \notin F\}$.

Es decir, la pérdida o ganancia que el jugador j puede ocasionar al jugador i por no participar en aquellos soportes en los cuales era miembro, es la misma que la que el jugador i puede ocasionar al jugador j si realiza la misma acción.

Como consecuencia de esta definición y de otros resultados anteriores se puede establecer el siguiente teorema para el valor de Myerson generalizado.

Teorema 3.36 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene contribuciones equilibradas y es la única regla de asignación que satisface la fórmula de Shapley.*

Demostración: Es inmediata ya que Myerson (1980) [54], prueba que si una regla de asignación satisface la fórmula de Shapley, entonces tiene contribuciones equilibradas y, además, que si esta última condición se verifica entonces es una regla de asignación justa y, por tanto, por el Teorema 3.29, es única. □

Obsérvese que, del razonamiento efectuado en la prueba del teorema anterior, se desprende también que el valor de Myerson generalizado es la única regla de asignación que tiene contribuciones equilibradas.

3.3 Cálculo del valor de Myerson generalizado

Uno de los principales inconvenientes del valor de Myerson generalizado radica en su cómputo efectivo ya que supone un problema combinatorio que involucra un número elevado de operaciones. De ahí, que sea interesante plantearse la búsqueda de procedimientos o métodos que faciliten, en lo posible, su cálculo.

López [46] y Bilbao [9] proponen realizar el cálculo del valor de Myerson generalizado, siempre que el par $(N, \mathcal{F})$ sea un sistema de partición, utilizando el potencial de Hart y Mas-Colell [40] del juego restringido y proporcionan un algoritmo basado en la función característica del juego (N, v) y en las $\mathcal{F}$-componentes de cualquier coalición. Así mismo, lo determinan utilizando la función multilineal de Owen [62] asociada al juego $(N, v^{\mathcal{F}})$.

Aunque las ideas expresadas en el párrafo anterior son generalizables a estructuras de cooperación $(N, v, \mathcal{F})$, con $(N, \mathcal{F})$ un sistema estable para la unión, en esta sección se indican otras dos posibles direcciones para realizar el cálculo del valor de Myerson generalizado. En primer lugar, y dado que los dividendos pueden utilizarse en la determinación del valor de Shapley, se estudian los mismos y algunas condiciones que dan lugar a expresiones sencillas de cómputo. Ello implica hacer un cálculo de los dividendos del juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. Por otro lado, y teniendo en cuenta que es posible que la coalición N no sea una coalición factible, se demuestra que puede realizarse el cálculo del valor de Myerson generalizado restringiéndose a las coaliciones factibles maximales de N a la que pertenezca cada uno de los jugadores.

3.3.1 Cálculo mediante los dividendos

La característica de linealidad del valor de Shapley hace que el valor de Myerson generalizado pueda ser expresado en términos de los dividendos de Harsanyi. Así, para cualquier $i \in N$, se tiene que

$$\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \Phi_i\left(N, v^{\mathcal{F}}\right) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \frac{\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S)}{|S|}.$$

Es inmediato observar que la determinación de los dividendos del $\mathcal{F}$-juego restringido, interviene en el cómputo del valor de Myerson generalizado. Obviamente, los dividendos pueden obtenerse de la siguiente forma,

$$\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v^{\mathcal{F}}(T).$$

Sin embargo, interesa estudiar bajo qué condiciones el valor de Myerson generalizado puede calcularse en términos de los dividendos del juego (N, v) y, si es posible, de su función característica.

Estas condiciones referentes a los dividendos del juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$, han sido estudiadas por López [46], demostrando que, en el caso de que el sistema de coaliciones factibles $(N, \mathcal{F})$ sea una geometría convexa estable para la unión se obtienen simplificaciones significativas. Ello se recoge en el siguiente resultado.

Teorema 3.37 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$, donde $(N, \mathcal{F})$ es una geometría convexa estable para la unión y (N, v) un juego cero-normalizado. Para cualquier $S \in \mathcal{F}$, se verifica:*

(a) $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{\{T:\overline{T}=S\}} \Delta_v(T) = \sum_{\{T:\, ex(S)\subseteq T\subseteq S\}} \Delta_v(T).$

(b) $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{\{T:\, S\setminus ex(S)\subseteq T\subseteq S\}} (-1)^{|S|-|T|} v(T).$

Nótese que el apartado (a) generaliza un resultado de Owen [61] que relaciona los dividendos del juego restringido $v^{\mathcal{F}}$ con los del juego v, y el apartado (b) permite hacer un cálculo directo de los dividendos del juego restringido mediante los valores del juego v.

Además, obsérvese que si $\mathcal{F} = 2^N$, entonces todos los elementos de cualquier coalición son puntos extremales de la misma. Es decir, se tiene $S \setminus ex(S) = \emptyset$ y, como $v^{\mathcal{F}} = v$, surge —utilizando el apartado (b) del Teorema 3.37— que, para toda $S \subseteq N$,

$$\Delta_v(S) = \Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T),$$

que es la expresión correspondiente a los dividendos de Harsanyi [36].

También, como consecuencia del Teorema 3.37, y teniendo en cuenta que, para $S \in \mathcal{F}$, el intervalo $[S^-, S]$ donde $S^- = S \setminus ex(S)$, es un álgebra de Boole en el retículo $(\mathcal{F}, \subseteq)$, puede deducirse que dada la terna $(N, v, \mathcal{F})$, donde $(N, \mathcal{F})$ es una geometría convexa estable para la unión y (N, v) un juego cero-normalizado, el valor de Myerson generalizado viene dado por

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S\in\mathcal{F}:\, i\in S\}} \frac{1}{|S|} \left[\sum_{T\in[S^-,S]} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \right],$$

ya que $\Delta_{v^{\mathcal{F}}}(S) = 0$, para toda $S \notin \mathcal{F}$.

3.3.2 Cálculo mediante las $\mathcal{F}$-componentes

Van den Nouweland (1993) [59] demostró que, en situaciones de comunicación, para computar el valor de Myerson de un jugador i, es suficiente considerar la coalición conexa maximal que contiene a dicho jugador. Este resultado puede ser generalizado, para computar más fácilmente el valor de Myerson generalizado de un jugador para sistemas estables para la unión, mediante la coalición factible maximal de N que contiene al jugador i.

Teorema 3.38 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión tal que (N, v) es un juego cero-normalizado. Sea $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, tal que $i \in M$. Entonces*

$$\mu_i (N, v, \mathcal{F}) = \mu_i (M, v|_M, \mathcal{F}_M),$$

donde $v|_M$ es la restricción de v a M y $\mathcal{F}_M = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq M\}$.

Demostración: Por definición, se tiene

$$\mu_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S) \right],$$

donde

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S \cup \{i\})} v(T) - \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T).$$

Sea $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$ tal que $i \in M$ y se denotará por $L \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $L \neq M$. Aplicando la Proposición 3.17, se obtiene

$$\begin{aligned}
v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S) &= \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}((S \cup \{i\}) \cap M)} v(T) + \sum_{\{T \in C_{\mathcal{F}}((S \cup \{i\}) \cap L) : L \neq M\}} v(T) \\
&\quad - \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S \cap M)} v(T) - \sum_{\{T \in C_{\mathcal{F}}(S \cap L) : L \neq M\}} v(T) \\
&= \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}((S \cup \{i\}) \cap M)} v(T) - \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S \cap M)} v(T),
\end{aligned}$$

ya que,

$$C_{\mathcal{F}}\left((S \cup \{i\}) \cap L\right) = C_{\mathcal{F}}\left((S \cap L) \cup (\{i\} \cap L)\right) = C_{\mathcal{F}}\left(S \cap L\right),$$

puesto que $\{i\} \cap L = \emptyset$, para toda $L \neq M$. Por tanto,

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}((S \cap M) \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S \cap M)$$

por ser $(S \cup \{i\}) \cap M = (S \cap M) \cup (\{i\} \cap M) = (S \cap M) \cup \{i\}$.

De ahí,

$$\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}((S \cap M) \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S \cap M)\right].$$

Ahora bien, si S recorre todas las coaliciones de N a las que el jugador i no pertenece, $S \cap M$ recorre todas las coaliciones contenidas en M que no contienen al jugador i. Luego,

$$\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{\{R \subseteq M : i \notin R\}} \left[\sum_{\{S \subseteq N : i \notin S,\, S \cap M = R\}} \gamma(S)\right] \left[v^{\mathcal{F}}(R \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(R)\right].$$

Teniendo en cuenta la fórmula clásica del valor de Shapley, (véase pág. 11), se tiene

$$\sum_{\{S \subseteq N : i \notin S,\, S \cap M = R\}} \gamma(S) = \sum_{\{S \subseteq N : i \notin S,\, S \cap M = R\}} \frac{s!\,(n-1-s)!}{n!}.$$

Fijada una coalición R, las coaliciones $S \subseteq N$, tal que $S \cap M = R$, son de la forma

$$\begin{cases} R, & \\ R \cup \{i_1\} & \text{para todo } i_1 \in N \backslash M, \\ R \cup \{i_1, i_2\} & \text{para todo } \{i_1, i_2\} \subseteq N \backslash M, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R \cup (N \backslash M) & \end{cases}$$

Llamando $r = |R|$, $m = |M|$, queda

$$\sum_{\{S\subseteq N:\, i\notin S,\, S\cap M=R\}} \gamma(S) = \sum_{p=0}^{n-m} \left(\begin{array}{c} n-m \\ p \end{array} \right) \frac{(r+p)!\,(n-1-r-p)!}{n!},$$

verificándose que

$$\sum_{p=0}^{n-m} \binom{n-m}{p} \frac{(r+p)!\,(n-1-r-p)!}{n!} = \frac{r!\,(m-1-r)!}{m!}.$$

En efecto, para ello, considérese la expresión

$$E = \frac{m!}{r!\,(m-1-r)!} \sum_{p=0}^{n-m} \binom{n-m}{p} \frac{(r+p)!\,(n-1-r-p)!}{n!},$$

y se probará que $E = 1$. Esta igualdad es indicada por Myerson (1980) [54, pág. 174] como un hecho combinatorio. Aquí, se indica una demostración similar a la dada por van den Nouweland (1993) [59] para situaciones de comunicación.

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{p=0}^{n-m} \frac{m!}{r!\,(m-1-r)!} \frac{(n-m)!}{p!\,(n-m-p)!} \frac{(r+p)!\,(n-1-r-p)!}{n!} \\
&= \sum_{p=0}^{n-m} \frac{m!\,(n-m)!}{n!} \frac{(r+p)!}{r!p!} \frac{(n-1-r-p)!}{(m-1-r)!\,(n-m-p)!} \\
&= \sum_{p=0}^{n-m} \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{r+p}{r} \binom{n-1-r-p}{m-1-r} \\
&= \sum_{p=0}^{n-m} \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{r+p}{r} \binom{n-m-p+m-1-r}{m-1-r}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$E\binom{n}{m} = \sum_{p=0}^{n-m} \binom{r+p}{r} \binom{n-m-p+m-1-r}{m-1-r}$$

y la expresión

$$\sum_{p=0}^{n-m} \binom{r+p}{r} \binom{n-m-p+m-1-r}{m-1-r},$$

es el coeficiente asociado a la potencia x^{n-m} en el producto

$$\left[\sum_{p=0}^{\infty} \binom{r+p}{r} x^p\right] \left[\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+m-1-r}{m-1-r} x^p\right].$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} \binom{r+p}{r} x^p &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(r+p)!}{r!p!} x^p = \frac{1}{r!} \sum_{p=0}^{\infty} (r+p)(r+p-1)\dots(p+1)\, x^p \\
&= \frac{1}{r!} \left[\sum_{p=0}^{\infty} x^{r+p}\right]^{(r} = \frac{1}{r!} \left[\frac{x^r}{1-x}\right]^{(r} \\
&= \frac{1}{r!} \left[-x^{r-1} - x^{r-2} - \dots - 1 + \frac{1}{1-x}\right]^{(r} \\
&= \frac{1}{r!} \left[\frac{1}{1-x}\right]^{(r} = \frac{1}{r!} \frac{r!}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+m-1-r}{m-1-r} x^p = \frac{1}{(1-x)^{m-r}},$$

y queda,

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{p=0}^{\infty} \binom{r+p}{r} x^p\right] \left[\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+m-1-r}{m-1-r} x^p\right] &= \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \frac{1}{(1-x)^{m-r}} \\
&= \frac{1}{(1-x)^{1+m}} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \binom{m+p}{m} x^p.
\end{aligned}$$

Por tanto, el coeficiente asociado a la potencia x^{n-m} será

$$\binom{m+(n-m)}{m} = \binom{n}{m},$$

luego,

$$E\binom{n}{m} = \binom{n}{m} \text{ y, de aquí, } E = 1.$$

Finalmente, se verifica

$$\begin{aligned}
\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) &= \sum_{\{R \subseteq M : i \notin R\}} \frac{r!\,(m-1-r)!}{m!} \left[v^{\mathcal{F}}(R \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(R)\right] \\
&= \sum_{\{R \subseteq M : i \notin R\}} \gamma(R) \left[v^{\mathcal{F}}(R \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(R)\right] \\
&= \mu_i\left(M, v\left|_M\right., \mathcal{F}_M\right).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

El valor de posición generalizado

Este capítulo se dedica al estudio de otro concepto de solución, denominado *valor de posición.* Dicho valor fue introducido por Meesen (1988) [52] y estudiado por Borm, Owen y Tijs (1992) [17], en el contexto de una cooperación parcial modelada mediante situaciones de comunicación.

Aquí, este valor se definirá en estructuras de cooperación estables para la unión y exigirá, previamente, la introducción de un nuevo juego definido sobre coaliciones constituidas por soportes no unitarios: *el juego de conferencias.* De este modo, una vez definidos los conceptos indicados, se estudia, en la segunda sección del capítulo, las propiedades del valor de posición, se generaliza la caracterización axiomática del valor de posición dada por Borm, Owen y Tijs (1992) en situaciones de comunicación y se relaciona este concepto de valor de posición generalizado con el valor de posición definido por Faigle [29], para *juegos de comunicación general.* Además, ya que el concepto de valor de posición fue extendido por van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) [58] a situaciones de comunicación modeladas por hipergrafos, se dedica una parte del capítulo a analizar las diferencias entre los hipergrafos de comunicación, los sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables y los correspondientes valores de posición.

El análisis de las propiedades que verifica el valor de posición generalizado suscita una comparación con las que satisface el valor de Myerson generalizado. Así, se posibilitan interrogantes sobre nuevas caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson generalizado y de ello trata la penúltima sección. Por último, de forma análoga a como se realizó en el capítulo anterior, se presentan algunos resultados que permitan un cómputo más eficaz del valor de posición generalizado.

4.1 El juego de conferencias y el valor de posición generalizado

Tal como se ha indicado en los párrafos anteriores y con el objetivo de definir el concepto de valor de posición generalizado, se introduce, en el contexto de estructuras de cooperación estables para la unión, un juego en el que el conjunto de jugadores va a estar formado por todos aquellos soportes cuyo cardinal sea estrictamente mayor que uno. A tal fin, se denotará, en todo este capítulo, por $\mathcal{C}$ el conjunto constituido por todos los soportes de un sistema $\cup$-estable que tengan cardinal mayor o igual que dos.

Definición 4.1 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Se denomina juego de conferencias, denotado $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, al juego $v^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $v^{\mathcal{C}}(\emptyset) = 0$, y*

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A}\right) = v^{\overline{\mathcal{A}}}(N) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} v(M), \text{ para toda } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}.$$

El juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ está bien definido ya que a cada $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ se le puede asociar su correspondiente clausura; además, la Proposición 3.3 asegura que el sistema de coaliciones factibles $\left(N,\overline{\mathcal{A}}\right)$ es $\cup$-estable y, por tanto, tiene sentido considerar la terna $\left(N,v,\overline{\mathcal{A}}\right)$ y el correspondiente juego restringido asociado tal como se indica en la Definición 2.10.

Obsérvese que si el juego (N,v) es cero-normalizado, entonces se tiene

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}\right)=v^{\overline{\mathcal{C}}}(N)=v^{\mathcal{F}}(N),$$

ya que $\overline{\mathcal{B}}=\overline{\mathcal{C}}\cup\{B\in\mathcal{B}:|B|\leq 1\}$.

Por otra parte, la Definición 4.1 supone una generalización del concepto de *juego arco* introducido por Borm, Owen y Tijs (1992) [17] y estudiado por van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) [58] ya que, en una situación de comunicación (N,v,E) (véase Ejemplo 2.5), resulta ser

$$\mathcal{C}=\ \left\{\{i,j\}:\{i,j\}\in E\right\},$$

y $\overline{\mathcal{A}}$ se corresponde con el subgrafo generado por el conjunto de aristas que forman $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$.

Sea la terna $(N,v,\mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión en la que se supondrá, a partir de ahora y a lo largo de todo el capítulo, que el juego (N,v) es cero-normalizado, y considérese el juego de conferencias $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$. Tiene sentido determinar el correspondiente valor de Shapley asociado al juego $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$:

$$\Phi\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\in\mathbb{R}^{|\mathcal{C}|},$$

que, obviamente, asigna a cada soporte no unitario un número real.

Puesto que a cada coalición soporte con cardinal mayor o igual que dos se le asocia un valor, parece razonable asignarle a cada jugador un valor tomando como referencia su participación en aquellas coaliciones soportes que tengan cardinal mayor o igual que dos. Ello da lugar al concepto de valor de posición generalizado.

Definición 4.2 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Para cada jugador se define su valor de posición generalizado de la siguiente forma*

$$\pi_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) & si \ \ \mathcal{C}_i \neq \emptyset, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

siendo $\mathcal{C}_i$ el conjunto de soportes, con al menos dos jugadores, en los cuales i participa; esto es, $\mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} : i \in C\}$.

El siguiente ejemplo ilustra los conceptos que se han introducido.

Ejemplo 4.3 *Considérese la estructura de cooperación estable para la unión, $(N, v, \mathcal{F})$, del Ejemplo 3.26. Se tiene que*

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\}, \quad \mathcal{C} = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}\},$$

y que

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \begin{cases} |S| - 1 & si\ S \in \mathcal{F}, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El juego de conferencias viene determinado en la siguiente tabla.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$	$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0
$\{\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{2,3,4\}\}$	$\{\{2,3,4\}\}$	$\{\{2,3,4\}\}$	2
$\{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$	$\{\{1,2,3,4\}\}$	3

El valor de Shapley del juego de conferencias, correspondiente a cada soporte no unitario es:

$$\Phi_{\{1,2,3\}}\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} : \{1,2,3\} \in \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \setminus \{\{1,2,3\}\})\right] = \frac{3}{2},$$

$$\Phi_{\{2,3,4\}}\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} : \{2,3,4\} \in \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \setminus \{\{2,3,4\}\})\right] = \frac{3}{2}.$$

Así, el valor de posición generalizado para cada jugador viene dado por

$$\begin{aligned}
\pi_1(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{1}{3}\Phi_{\{1,2,3\}}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)=\frac{1}{2},\\
\pi_2(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{1}{3}\Phi_{\{1,2,3\}}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)+\frac{1}{3}\Phi_{\{2,3,4\}}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)=1,\\
\pi_3(N,v,\mathcal{F}) &= \pi_2(N,v,\mathcal{F})=1,\\
\pi_4(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{1}{3}\Phi_{\{2,3,4\}}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

con lo que, finalmente, $\pi(N,v,\mathcal{F})=\left(\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2}\right)$.

4.2 El valor de posición generalizado: propiedades y axiomas

En primer lugar, parece natural plantearse si el valor de posición generalizado es una regla de asignación para estructuras de cooperación estables para la unión, en el mismo sentido que se estableció en el capítulo anterior. Para ello, previamente, se expone un resultado que permite descomponer, de forma aditiva, el juego de conferencias.

Lema 4.4 *Sea la terna* $(N,v,\mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión y* $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$ *el juego de conferencias asociado. Si* $N\notin\mathcal{F}$*, entonces existe una partición* $\{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\ldots,\mathcal{D}_p\}$ *de* $\mathcal{C}$ *tal que*

$$v^{\mathcal{C}}=\sum_{i=1}^{p}v^{\mathcal{D}_i},$$

siendo $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{D}_i}\right)$ *el juego definido por*

$$v^{\mathcal{D}_i}:2^{\mathcal{C}}\longrightarrow\mathbb{R},\quad v^{\mathcal{D}_i}(\mathcal{A})=v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}\cap\mathcal{D}_i),\quad\forall\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}.$$

Demostración: Por hipótesis $N \notin \mathcal{F}$. Entonces, aplicando el apartado (b) de la Proposición 3.11, existe una partición $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ de la base $\mathcal{B}$. Esto, a su vez, implica que existe una partición $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p\}$ de $\mathcal{C}$.

Por tanto, para toda coalición de soportes con cardinal mayor o igual que dos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, se verifica, aplicando la definición de juego de conferencias y la Proposición 3.13, que

$$
\begin{aligned}
v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) &= v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \\
&= v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{D}_i\right)\right) \\
&= v^{\mathcal{C}}\left(\bigcup_{i=1}^{p} (\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i)\right) \\
&= v^{\overline{\bigcup_{i=1}^{p} (\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i)}}(N) \\
&= \sum_{M \in C_{\overline{\bigcup_{i=1}^{p} (\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i)}}(N)} v(M) \\
&= \sum_{M \in \bigcup_{i=1}^{p} C_{\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i}}(N)} v(M) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i}}(N)} v(M)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p} v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} v^{\mathcal{D}_i}(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

□

Nótese que $\mathcal{D}_i$ es un soporte en el sentido de Shapley para el juego $v^{\mathcal{D}_i}$, ya que, para toda $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$,

$$
v^{\mathcal{D}_i}(\mathcal{A}) = v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A} \cap \mathcal{D}_i)
$$

$$
\begin{aligned}
&= v^{\mathcal{C}}\left((\mathcal{A}\cap\mathcal{D}_i)\cap\mathcal{D}_i\right)\\
&= v^{\mathcal{D}_i}\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{D}_i\right).
\end{aligned}
$$

Teorema 4.5 *El valor de posición generalizado $\pi : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una regla de asignación.*

Demostración: Dada $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$, se ha de probar:

1. Para toda $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, $\sum\limits_{i\in M} \pi_i\ (N, v, \mathcal{F}) = v(M)$.
2. Para todo $i \notin \bigcup\limits_{M\in C_{\mathcal{F}}(N)} M$, $\pi_i\ (N, v, \mathcal{F}) = 0$.

La segunda condición es inmediata, ya que si $i \notin \bigcup_{M\in C_{\mathcal{F}}(N)} M$, el jugador no pertenece a ninguna coalición factible. Por tanto, $\mathcal{C}_i = \emptyset$ y, por definición, $\pi_i\,(N, v, \mathcal{F}) = 0$.

Se prueba ahora la primera condición. Sea $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$. Si $|M| = 1$, entonces $M = \{i\}$ y $\mathcal{C}_i = \emptyset$. De ahí,

$$\sum_{i\in M} \pi_i\,(N, v, \mathcal{F}) = \pi_i\,(N, v, \mathcal{F}) = 0 = v(\{i\}),$$

puesto que v es cero-normalizado.

Supóngase que $|M| > 1$, lo cual implica que $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$, para todo $i \in M$. Además, como M es una componente maximal de N, es una coalición factible y por tanto,

$$M = \bigcup_{k\in K} B_k, \text{ con } B_k \in \mathcal{B},$$

siendo $\{B_k\}_{k\in K}$ la colección formada por todos los soportes que están incluidos en M. Si $i \in M$, resulta que $\mathcal{C}_i \subseteq \{B_k\}_{k\in K}$, ya que de otra forma existiría $C \in \mathcal{C}_i$ y, en consecuencia,

$$\left.\begin{array}{l} i \in M = \bigcup_k B_k \\ i \in C \notin \{B_k\}_{k\in K} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\bigcup_{k\in K} B_k\right] \cup C \in \mathcal{F},$$

por la estabilidad para la unión cuando la intersección no es vacía y M no sería una coalición factible maximal de N, al ser

$$M \subset \left[\bigcup_{k\in K} B_k \right] \cup C.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in M} \pi_i \left(N, v, \mathcal{F}\right) &= \sum_{i\in M} \left[\sum_{C\in\mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \right] \\
&= \sum_{\left\{\{B_k\}_{k\in K}: |B_k|\geq 2\right\}} \left[|B_k| \frac{1}{|B_k|} \right] \Phi_{B_k} \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \\
&= \sum_{\left\{\{B_k\}_{k\in K}: |B_k|\geq 2\right\}} \Phi_{B_k} \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades del valor de Shapley cuando un juego puede descomponerse de la forma que indica el Lema 4.4, (véase pág. 13), se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\left\{\{B_k\}_{k\in K}: |B_k|\geq 2\right\}} \Phi_{B_k} \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\left\{\{B_k\}_{k\in K}: |B_k|\geq 2\right\}} \Phi_{B_k} \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{D}_k}\right) \\
&= v^{\mathcal{D}_k} \left(\{B_k\}_{k\in K}\right) \\
&= v^{\mathcal{C}} \left(\{B_k\}_{k\in K} \cap \mathcal{D}_k\right) \\
&= v^{\mathcal{C}} \left(\{B_k\}_{k\in K}\right) = v^{\overline{\{B_k\}}_{k\in K}} \left(N\right) \\
&= v\left(M\right),
\end{aligned}$$

siendo $\mathcal{D}_k = \left\{\{B_k\}_{k\in K} : |B_k| \geq 2\right\}$. □

Obsérvese que si $N \in \mathcal{F}$, entonces la eficiencia del valor de posición es inmediata ya que,

$$\sum_{i\in N} \pi_i \left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{i\in N} \left[\sum_{C\in\mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{C \in \mathcal{C}} \left[|C| \frac{1}{|C|} \right] \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}} \right) \\
&= \sum_{C \in \mathcal{C}} \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}} \right) = v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \\
&= v^{\mathcal{F}}(N) \\
&= v(N).
\end{aligned}
$$

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que el valor de posición generalizado, a diferencia del valor de Myerson generalizado, no es una regla de asignación *justa* ni tampoco *estable*, aunque el juego (N, v) sea superaditivo.

Ejemplo 4.6 *Considérese el sistema* $(N, \mathcal{F})$ *de coaliciones factibles estable para la unión en el que* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y*

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Sea (N, v) *el juego de unanimidad correspondiente a la coalición* $\{2, 3\}$*; es decir,*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \supseteq \{2, 3\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se construye el juego de conferencias $v^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$*. En este caso,*

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}, \quad \mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$	$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0
$\{\{1, 2\}\}$	$\{\{1, 2\}\}$	$\{\{1, 2\}\}$	0
$\{\{2, 3\}\}$	$\{\{2, 3\}\}$	$\{\{2, 3\}\}$	1
$\{\{2, 3, 4\}\}$	$\{\{2, 3, 4\}\}$	$\{\{2, 3, 4\}\}$	1
$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$	$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$	$\{\{1, 2, 3\}\}$	1
$\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$	$\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$	$\{\{1, 2, 3, 4\}\}$	1
$\{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$	$\{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$	$\{\{2, 3, 4\}\}$	1
$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$	$\mathcal{F} \setminus \{1\}$	$\{\{1, 2, 3, 4\}\}$	1

Por tanto, el juego de conferencias viene dado, para $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, por

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & si\ \mathcal{A} = \{\{1,2\}\} \ \ o\ \mathcal{A} = \emptyset, \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Se calculan, ahora, las componentes del valor de Shapley:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\{1,2\}}\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}:\{1,2\}\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\setminus\{\{1,2\}\})\right] = 0, \\
\Phi_{\{2,3\}}\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}:\{2,3\}\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\setminus\{\{2,3\}\})\right] = \frac{1}{2}, \\
\Phi_{\{2,3,4\}}\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}:\{2,3,4\}\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\setminus\{\{2,3,4\}\})\right] = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, se deduce que el valor de posición generalizado es, para cada uno de los jugadores,

$$\begin{aligned}
\pi_1(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{C\in\mathcal{C}_1} \frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = 0, \\
\pi_2(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{C\in\mathcal{C}_2} \frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \frac{5}{12}, \\
\pi_3(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{C\in\mathcal{C}_3} \frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \frac{5}{12}, \\
\pi_4(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{C\in\mathcal{C}_4} \frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Para comprobar que el valor de posición generalizado no es una regla de asignación justa, considérese $B = \{2,3,4\}$. Entonces

$$\overline{\mathcal{B}\setminus\{B\}} = \{\{1\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}, \quad \mathcal{C}\setminus\{B\} = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$$

y se obtiene

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{B\}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$	$v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}(\mathcal{A})$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0
$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	0
$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	1
$\{\{1,2\},\{2,3\}\}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	1

En este caso, las componentes del valor de Shapley, vienen dadas por

$$\Phi_{\{1,2\}}\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = 0,$$

$$\Phi_{\{2,3\}}\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = 1.$$

De ahí, el valor de posición generalizado para cada jugador es, ahora,

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{\{2,3,4\}\}}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_1 \setminus \{B\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = 0, \\
\pi_2\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{\{2,3,4\}\}}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_2 \setminus \{B\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = \frac{1}{2}, \\
\pi_3\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{\{2,3,4\}\}}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_3 \setminus \{B\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = \frac{1}{2}, \\
\pi_4\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{\{2,3,4\}\}}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_4 \setminus \{B\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{B\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{B\}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Así, se ha obtenido,

π_i	$(N, v, \mathcal{F})$	$\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{\{2,3,4\}\}}\right)$
π_1	0	0
π_2	$5/12$	$1/2$
π_3	$5/12$	$1/2$
π_4	$1/6$	0

y como se ha considerado $B = \{2,3,4\}$, resulta

j	$\pi_j(N,v,\mathcal{F}) - \pi_j\left(N,v,\overline{\mathcal{B}\setminus\{\{2,3,4\}\}}\right)$
$j=2$	$5/12 - 1/2 = -1/12$
$j=3$	$5/12 - 1/2 = -1/12$
$j=4$	$1/6 - 0 = 1/6$

El hecho de que la pérdida o ganancia no sea la misma para todos los elementos de $B=\{2,3,4\}$*, así como su signo, indica que el valor de posición generalizado no es una regla justa ni estable, aunque el juego considerado es un juego convexo y, por tanto, superaditivo.*

En lo que sigue a continuación, se introducirán progresivamente algunas propiedades, que pueden ser interpretadas como razonables o deseables para cualquier regla de asignación en estructuras de cooperación estables para la unión, y se estudiará si el valor de posición generalizado las satisface, con la intención de obtener una caracterización axiomática del mismo.

Definición 4.7 *Una regla de asignación* $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *se denomina aditiva si, para cualesquiera* $(N,v,\mathcal{F}),(N,w,\mathcal{F}) \in SE^N$*, se verifica*

$$\gamma(N,v+w,\mathcal{F}) = \gamma(N,v,\mathcal{F}) + \gamma(N,w,\mathcal{F}).$$

Parece razonable que una regla de asignación verifique la propiedad de aditividad, ya que es lógico que un jugador considere que su ganancia en el juego $v+w$ debería ser la suma de las ganancias correspondientes a su participación en los juegos v y w.

Definición 4.8 *Un soporte* $H \in \mathcal{C}$ *se denomina superfluo para la estructura de cooperación* $(N,v,\mathcal{F}) \in SE^N$ *si, para cualquier* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$*, se verifica*

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}\setminus\{H\}).$$

Obsérvese que, en la definición, el soporte H es un jugador nulo en el juego de conferencias, entendiendo que un jugador es nulo en un juego si todas sus contribuciones marginales son nulas. De la definición se deduce también que, en cada subsistema de soportes con cardinal al menos dos, la presencia de un soporte superfluo no afecta a las ganancias o valor de la coalición N.

Definición 4.9 *Una regla de asignación $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad del soporte superfluo si, para cualesquiera $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ y $H \in \mathcal{C}$ que sea un soporte superfluo, se verifica*

$$\gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right).$$

Teorema 4.10 *El valor de posición generalizado $\pi : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las propiedades de aditividad y del soporte superfluo.*

Demostración: La aditividad se obtiene, trivialmente, al tener en cuenta que el valor de Shapley satisface esta propiedad.

Sea $H \in \mathcal{C}$ un soporte superfluo. Se ha de probar que

$$\pi\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \pi\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right).$$

Sea $i \in N$ tal que $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$. Entonces, por definición

$$\begin{aligned} \pi_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right), \\ \pi_i\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_i \setminus \{H\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{H\}, v^{\mathcal{C} \setminus \{H\}}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, si $i \in H$, entonces

$$\pi_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i \setminus \{H\}} \frac{1}{|C|} \Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) + \frac{1}{|H|} \Phi_H\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right),$$

donde

$$\Phi_H\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: H\in\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{H\}\right)\right] = 0,$$

puesto que H es un soporte superfluo.

Por tanto,

$$\pi_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \sum_{C\in\mathcal{C}_i\setminus\{H\}} \frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right), \ \forall i \in N.$$

Esto implica que es suficiente probar que

$$\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \Phi_C\left(\mathcal{C}\setminus\{H\}, v^{\mathcal{C}\setminus\{H\}}\right), \ \forall C \in \mathcal{C},\ C \neq H.$$

Por un lado, aplicando la fórmula correspondiente al valor de Shapley,

$$\begin{aligned}
\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S},\, H\in\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\right] \\
&+ \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S},\, H\notin\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\right].
\end{aligned}$$

Se puede establecer una correspondencia biyectiva entre las coaliciones $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}$, con $C\in\mathcal{S}$, que contienen al soporte H, y aquéllas que no lo contienen. Entonces, teniendo en cuenta que H es un soporte superfluo y agrupando las parejas que resultan de la biyección, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S},\, H\in\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{H\}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\setminus\{H\}\right)\right] \\
&+ \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S},\, H\notin\mathcal{S}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}: C\in\mathcal{S},\, H\notin\mathcal{S}\}} \left(\gamma\left(\mathcal{S}\cup\{H\}\right) + \gamma\left(\mathcal{S}\right)\right)\left[v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\setminus\{C\}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por definición de $\gamma(\mathcal{S})$ y considerando que $|\mathcal{S} \cup \{H\}| = |\mathcal{S}| + 1 = s + 1$, resulta ser

$$\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} : C \in \mathcal{S},\, H \notin \mathcal{S}\}} \frac{(s-1)!\,(c-s-1)!}{(c-1)!} \left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \setminus \{C\})\right],$$

donde $c = |\mathcal{C}|$. Por otro lado,

$$\Phi_C\left(\mathcal{C} \setminus \{H\}, v^{\mathcal{C} \setminus \{H\}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{H\} : C \in \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C} \setminus \{H\}}(\mathcal{S}) - v^{\mathcal{C} \setminus \{H\}}(\mathcal{S} \setminus \{C\})\right],$$

siendo $\gamma(\mathcal{S}) = \dfrac{(s-1)!\,(c-s-1)!}{(c-1)!}$ por definición del valor de Shapley y por el hecho de ser $|\mathcal{C} \setminus \{H\}| = c - 1$.

Obviamente, $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = v^{\mathcal{C} \setminus \{H\}}(\mathcal{S})$ ya que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{H\}$ y, por tanto, queda probada la igualdad. $\square$

Teniendo en cuenta la definición de valor de posición generalizado, parece lógico definir el concepto de influencia de un jugador de la siguiente forma.

Definición 4.11 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. La influencia del jugador i viene dada mediante la expresión*

$$I_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} & \text{si } \mathcal{C}_i \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} : i \in C\}$.

Nótese que la definición de influencia de un jugador i mide su importancia en el sistema $(N, \mathcal{C})$, a través de su participación en los soportes no unitarios del mismo.

Definición 4.12 *Una terna* $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ *se denomina anónima para los soportes si existe una función* $f : \{0, 1, \ldots, |\mathcal{C}|\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$*,*

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = f(|\mathcal{A}|).$$

Es decir, $(N, v, \mathcal{F})$ *es anónima para los soportes si el correspondiente juego de conferencias* $(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}})$ *es simétrico.*

Esta definición asegura que si una terna $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ es anónima para los soportes, entonces todos los soportes son igualmente importantes o desempeñan el mismo papel en el juego de conferencias asociado.

Definición 4.13 *Una regla de asignación* $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tiene la propiedad de influencia si, para cada terna* $(N, v, \mathcal{F})$ *anónima para los soportes, existe un* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{F}) = \alpha\, I_i(N, v, \mathcal{F}), \ \forall i \in N.$$

Así, si los valores, en el juego de conferencias, sólo dependen del número de soportes, los pagos a los jugadores son proporcionales a su influencia.

Teorema 4.14 *El valor de posición generalizado* $\pi : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisface la propiedad de influencia.*

Demostración: Considérese la terna $(N, v, \mathcal{F})$ anónima para los soportes. Ello quiere decir, por definición, que el juego $(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}})$ es simétrico. Luego, (véase pág. 14)

$$\Phi_C(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}), \ \forall C \in \mathcal{C}.$$

Por tanto, para todo $i \in N$ tal que $\mathcal{C}_i \neq \emptyset$, se obtiene

$$\pi_i(N, v, \mathcal{F}) \ \ = \ \ \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{C\in\mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|}\left(\frac{1}{|\mathcal{C}|}v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\right) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{C}|}v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \sum_{C\in\mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \\
&= \frac{1}{|\mathcal{C}|}v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\ I_i(N,v,\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

Si $i \in N$ es tal que $\mathcal{C}_i = \emptyset$, se tiene que $\pi_i(N,v,\mathcal{F}) = 0$. Finalmente, en cualquier caso, resulta que para todo $i \in N$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\pi_i(N,v,\mathcal{F}) = \alpha\, I_i(N,v,\mathcal{F}), \text{ con } \alpha = \frac{1}{|\mathcal{C}|}v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}).$$

□

La propiedad de influencia se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.15 *Sea* $N = \{1,2,3,4\}$ *y la estructura de cooperación* $(N,v,\mathcal{F})$ *considerada en el Ejemplo 3.26. Para dicha estructura de cooperación estable para la unión, la influencia de cada jugador viene dada por*

$$\begin{aligned}
I_1(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{1}{3}, \text{ ya que } \mathcal{C}_1 = \{C\in\mathcal{C} : 1\in C\} = \{\{1,2,3\}\}, \\
I_2(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{2}{3}, \text{ ya que } \mathcal{C}_2 = \{C\in\mathcal{C} : 2\in C\} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}, \\
I_3(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{2}{3}, \text{ ya que } \mathcal{C}_3 = \{C\in\mathcal{C} : 3\in C\} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\}, \\
I_4(N,v,\mathcal{F}) &= \frac{1}{3}, \text{ ya que } \mathcal{C}_4 = \{C\in\mathcal{C} : 4\in C\} = \{\{2,3,4\}\}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el vector influencia es $I(N,v,\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

En este caso, si se observa el juego de conferencias (pág. 136), resulta que $(N,v,\mathcal{F})$ *es una estructura de cooperación anónima para los soportes ya que, se puede definir la siguiente función*

$$f:\{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=3,$$

y, por tanto,

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A}\right) = f\left(\left|\mathcal{A}\right|\right).$$

Al considerar el valor de posición, calculado en el Ejemplo 4.3

$$\pi\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\right),$$

se verifica $\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, *donde* $\alpha = \frac{1}{|\mathcal{C}|} v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}\right) = \frac{3}{2}$, *tal como se indicó en la prueba del teorema anterior.*

Hasta aquí, se han introducido las propiedades de aditividad, del soporte superfluo e influencia para reglas de asignación definidas sobre estructuras de cooperación estables para la unión, demostrándose que el valor de posición generalizado las verifica. Estas propiedades no permiten una caracterización axiomática del mismo en el conjunto SE^N aunque sí lo determinan, de modo único, en una clase especial de estructuras de cooperación estables para la unión. Con este último propósito se establece el siguiente resultado y se definen aquellas estructuras de cooperación que van a considerarse.

Lema 4.16 *Sea* $(N, \mathcal{F})$ *un sistema* $\cup$*-estable, tal que la expresión de cada coalición factible no unitaria como unión de soportes no unitarios sea única. Si* $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ *y* $T = \bigcup_{j \in J} T_j$, *con* $S_i, T_j \in \mathcal{C}$ *para cualesquiera* i, j, *entonces*

$$S \subseteq T \Longleftrightarrow \left\{S_i\right\}_{i \in I} \subseteq \left\{T_j\right\}_{j \in J}.$$

Demostración: Supóngase que $\left\{S_i\right\}_{i \in I}$ no está contenido en $\left\{T_j\right\}_{j \in J}$, entonces existe $S_k \in \left\{S_i\right\}_{i \in I}$ tal que $S_k \notin \left\{T_j\right\}_{j \in J}$ y, por lo tanto, $S_k \neq T_j$, para todo $j \in J$. De aquí, $T = \bigcup_{j \in J} T_j$ y $T = \left(\bigcup_{j \in J} T_j\right) \cup S_k$ ya que $S_k \subseteq S \subseteq T$ y consecuentemente, la expresión de T como unión de soportes no sería única, en contradicción con la hipótesis del lema. El recíproco es evidente. $\square$

Se denotará por SEI^N el conjunto de estructuras de cooperación estables para la unión $(N, v, \mathcal{F})$ donde $(N, \mathcal{F})$ verifica las siguientes condiciones:

1) $\forall S, T \in \mathcal{F}$, $|S \cap T| \geq 2 \Longrightarrow S \cap T \in \mathcal{F}$.

2) Toda coalición factible no unitaria se expresa de forma única como unión de soportes no unitarios.

A continuación, se proporcionan algunos ejemplos.

Ejemplo 4.17 *Considérese una estructura de cooperación* $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$*, con* $N = \{1, 2, 3\}$ *y*

$$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Es inmediato que $(N, v, \mathcal{F}) \notin SEI^N$ *ya que, dada la coalición* $N = \{1, 2, 3\}$*, se puede expresar*

$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,3\} \cup \{2,3\},$$

y, por tanto, toda coalición factible no unitaria no siempre admite una expresión única como unión de soportes no unitarios.

Si, ahora, se considera $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$*, con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *y*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;=\; & \{\{3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{3,5,6\}, \{1,2,3,4\}, \\ & \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}, \end{aligned}$$

puede comprobarse, fácilmente que $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$.

Teorema 4.18 *El valor de posición generalizado* $\pi : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es la única regla de asignación en* SEI^N *que verifica las propiedades de aditividad, soporte superfluo e influencia.*

Demostración: A través de los teoremas anteriores se ha probado que el valor de posición generalizado verifica todas las propiedades indicadas. Por tanto, sólo queda demostrar la unicidad.

Supóngase que $\gamma : SEI^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es otra regla de asignación que verifica las propiedades de aditividad, soporte superfluo e influencia. Habrá que demostrar que $\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \pi(N, v, \mathcal{F})$.

Dado que (N, v) es un juego y $\{u_T : T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ es una base en Γ^N, se tiene que

$$v = \sum_{\{T:T \neq \emptyset\}} \alpha_T u_T,$$

y, como (N, v) es cero-normalizado,

$$0 = v(\{i\}) = \sum_{\{T:T \neq \emptyset\}} \alpha_T u_T(\{i\}) = \alpha_{\{i\}}, \text{ implica } v = \sum_{\{T:|T| \geq 2\}} \alpha_T u_T.$$

Según lo anterior, probar que $\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \pi(N, v, \mathcal{F})$ es equivalente a demostrar que

$$\gamma\left(N, \sum_{\{T:|T| \geq 2\}} \alpha_T u_T, \mathcal{F}\right) = \pi\left(N, \sum_{\{T:|T| \geq 2\}} \alpha_T u_T, \mathcal{F}\right),$$

y, al ser tanto π como γ reglas de asignación aditivas,

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \pi(N, v, \mathcal{F})$$

si y sólo si

$$\sum_{\{T:|T| \geq 2\}} \gamma(N, \alpha_T u_T, \mathcal{F}) = \sum_{\{T:|T| \geq 2\}} \pi(N, \alpha_T u_T, \mathcal{F}).$$

De ahí que, para probar la igualdad, es suficiente demostrar que, para toda coalición $T \subseteq N$, con $|T| \geq 2$, se verifica

$$\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \pi(N, \alpha u_T, \mathcal{F}), \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para probar esta última igualdad, fijada $T \subseteq N$ con $|T| \geq 2$, se consideran dos casos:

1. Existe una coalición $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$.

2. No existe ninguna coalición $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$.

Se comienza probando la igualdad en el caso 2. En este caso, el juego de conferencias asociado a αu_T sería el siguiente

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} (\alpha u_T)(M), \text{ para cada } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}.$$

Como no existe ninguna coalición $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$, entonces $u_T(M) = 0$, para toda $M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$, ya que si, para algún M, $u_T(M) = 1$, entonces $T \subseteq M$ y al ser $M \in \mathcal{F}$, iría en contra de lo supuesto. De ahí,

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} (\alpha u_T)(M) = 0, \ \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C},$$

y así, el juego de conferencias asociado a αu_T es el juego nulo. Ello implica que

$$\Phi_C\left(\mathcal{C}, (\alpha u_T)^{\mathcal{C}}\right) = 0, \ \forall C \in \mathcal{C},$$

y por tanto,

$$\pi_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = 0, \ \forall i \in N.$$

Por otro lado, si $(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}$ es el juego nulo, entonces todos los soportes de $\mathcal{C}$ son superfluos, porque

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = (\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A} \setminus \{H\}) = 0, \ \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}, \ \forall H \in \mathcal{C}.$$

Así, $\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \gamma\left(N, \alpha u_T, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right) = \cdots = \gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right)$, donde $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}}$; es decir, $\mathcal{F}'$ sólo contiene a las coaliciones factibles unitarias, si las hay, ya que se han ido suprimiendo de forma consecutiva todos los soportes no unitarios. Además, si $(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}$ es el juego nulo, la terna $\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right)$ es anónima para los soportes y, de aquí, el vector $\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right)$ es proporcional al vector de influencias. Por tanto,

$$\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \alpha\, I\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \alpha\, \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

ya que, para todo $i \in N$,

$$I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}^{'}\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} = 0, \text{ pues } \mathcal{C}_i = \emptyset.$$

Luego, $\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}^{'}\right) = \mathbf{0}$ y así,

$$\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}\right) = \pi\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}\right) = \mathbf{0}.$$

Se prueba ahora la igualdad en el caso 1. Sea $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$ y considérese el conjunto $\{F \in \mathcal{F} : T \subseteq F\}$ que, obviamente, es no vacío. Sea entonces,

$$\overline{T} = \bigcap \left\{F \in \mathcal{F} : T \subseteq F\right\}.$$

Este conjunto no es vacío ya que, viene dado como intersección de coaliciones factibles las cuales, todas ellas, contienen a T. Además, $\overline{T} \in \mathcal{F}$ pues si $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$ son tales que $T \subseteq T_1$, $T \subseteq T_2$, resulta ser $|T_1 \cap T_2| \geq |T| \geq 2$ y, por hipótesis, $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{F}$. También es inmediato que es el menor conjunto factible que contiene a T.

Además, por la Proposición 3.12, al ser $\overline{T} \in \mathcal{F}$ y $\left|\overline{T}\right| \geq 2$ resulta que,

$$\overline{T} = \bigcup_{k \in K} B_k, \text{ con } B_k \in \mathcal{C},\ \forall k \in K.$$

Por otro lado, el juego de conferencias asociado a αu_T será

$$\left(\alpha u_T\right)^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\alpha u_T\right)^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \overline{T} \in \overline{\mathcal{A}}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

puesto que

$$\left(\alpha u_T\right)^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A}\right) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} \left(\alpha u_T\right)(M) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} \alpha u_T(M) = \alpha,$$

si y sólo si $u_T(M) = 1$, para algún $M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$. Es inmediato que si existe $M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$ tal que $u_T(M) = 1$ éste es único, puesto que las coaliciones factibles maximales son siempre disjuntas. Así,

$$u_T(M) = 1 \Longleftrightarrow T \subseteq M, \text{ con } M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F},$$

y al ser $\overline{T} \in \mathcal{F}$ el menor conjunto factible que contiene a T, se tiene

$$u_T(M) = 1 \Longleftrightarrow T \subseteq \ \overline{T} \subseteq M, \text{ con } M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}.$$

Por otro lado, como $\overline{T} = \bigcup_{k\in K} B_k$, con $B_k \in \mathcal{C}$, para todo $k \in K$, resulta

$$\overline{T} \subseteq M,\ M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F} \Longleftrightarrow \{B_k\}_{k\in K} \subseteq \mathcal{A},$$

ya que la expresión de cada coalición factible no unitaria como unión de soportes no unitarios es única (Lema 4.16). Así, se obtiene

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \{B_k\}_{k\in K} \subseteq \mathcal{A}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a que el juego de conferencias se comporta exactamente igual que un escalar α por un juego de unanimidad definido sobre $\mathcal{C}$, el valor de Shapley es

$$\Phi_C\left(\mathcal{C}, (\alpha u_T)^{\mathcal{C}}\right) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|K|} & \text{si } C \in \{B_k\}_{k\in K}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $|K| = \left|\{B_k\}_{k\in K}\right|$. De aquí, el valor de posición generalizado vendrá dado, para todo $i \in \overline{T}$, por

$$\pi_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \sum_{C\in\mathcal{C}_i\cap\left(\{B_k\}_{k\in K}\right)} \frac{1}{|C|}\frac{\alpha}{|K|} = \frac{\alpha}{|K|}\sum_{C\in\mathcal{C}_i\cap\left(\{B_k\}_{k\in K}\right)} \frac{1}{|C|},$$

de donde

$$\pi_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|K|}\displaystyle\sum_{C\in\mathcal{C}_i\cap\left(\{B_k\}_{k\in K}\right)} \frac{1}{|C|} & \text{si } i \in \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación, se prueba que $\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F})$ viene determinado de la misma forma, con lo cual ambos valores coinciden. En efecto, en primer lugar, obsérvese que todos los soportes $C \in \mathcal{C}$ tales que $C \notin \{B_k\}_{k\in K}$ son superfluos en el juego de conferencias. Por tanto, si se aplica sucesivamente la propiedad del soporte superfluo para la regla de asignación γ, resulta

$$\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}\right) = \cdots = \gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right),$$

donde $\mathcal{F}' = \left(\overline{\{B_k\}}_{k\in K}\right) \cup \left(\{\{j\} : \{j\} \in \mathcal{F}\}\right)$. Por otro lado, el juego de conferencias asociado a αu_T en $\mathcal{F}^{'}$ es anónimo para los soportes ya que,

$$\left(\alpha u_T\right)^{\mathcal{C}}|_{\mathcal{F}'}\left(\mathcal{A}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \mathcal{A} = \{B_k\}_{k\in K}\,, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De ahí, aplicando la propiedad de influencia para la regla de asignación γ se tiene que existe un número real β de forma que

$$\gamma\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \beta\, I\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right).$$

Si $i \in N \setminus \overline{T}$, entonces $I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = 0$ (ya que $i \notin B_k$, para todo $k \in K$) y, por tanto, $\gamma_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = 0$. Si $i \in \overline{T}$, al ser $\overline{T} \in C_{\mathcal{F}'}(N)$ resulta que, aplicando la eficiencia a ambas reglas de asignación en la terna $(N, \alpha u_T, \mathcal{F}')$, se tendría

$$\sum_{i\in\overline{T}} \gamma_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \alpha u_T(\overline{T}) = \sum_{i\in\overline{T}} \pi_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right),$$

de donde,

$$\sum_{i\in\overline{T}} \beta\, I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \sum_{i\in\overline{T}} \delta\, I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right), \text{ con } \delta = \frac{\alpha}{|K|},$$

y, de aquí,

$$\sum_{i\in\overline{T}} \left(\beta - \delta\right) I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = 0,$$

y, como para $\overline{T} \in C_{\mathcal{F}'}(N)$, se verifica que $\sum_{i\in\overline{T}} I_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) \neq 0$, se deduce la igualdad $\beta = \delta$.

Finalmente, se obtiene,

$$\gamma_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}\right) = \gamma_i\left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|K|} \displaystyle\sum_{C\in\mathcal{C}_i\cap\left(\{B_k\}_{k\in K}\right)} \frac{1}{|C|} & \text{si } i \in \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\gamma\left(N,\alpha u_T,\mathcal{F}\right)=\pi\left(N,\alpha u_T,\mathcal{F}\right).$$

En consecuencia, $\gamma\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\pi\left(N,v,\mathcal{F}\right).$ □

Corolario 4.19 *Sea la estructura de cooperación* $(N,v,\mathcal{F})$*, donde* $(N,\mathcal{F})$ *es una familia intersectante tal que la expresión de cada coalición factible no unitaria como unión de soportes no unitarios sea única. Entonces, el valor de posición generalizado es la única regla de asignación que verifica las propiedades de aditividad, soporte superfluo e influencia.*

Obsérvese que si $(N,\mathcal{F})$ es una geometría convexa, estable para la unión y tal que la expresión de cada coalición factible no unitaria como unión de soportes no unitarios sea única, entonces el valor de posición generalizado es la única regla de asignación que verifica las propiedades de aditividad, soporte superfluo e influencia.

De la demostración del Teorema 4.18 se puede deducir la siguiente proposición.

Proposición 4.20 *Sea* $(N,v,\mathcal{F})$ *una estructura de cooperación estable para la unión, tal que* $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$ *es un juego simétrico. Entonces, el valor de posición generalizado es la única regla de asignación que verifica la propiedad de influencia.*

Demostración: Como $v^{\mathcal{C}}:2^{\mathcal{C}}\longrightarrow\mathbb{R}$ es simétrico, la terna $(N,v,\mathcal{F})$ es anónima para los soportes y según el Teorema 4.14

$$\pi\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\alpha\, I\left(N,v,\mathcal{F}\right),\text{ con }\alpha=\frac{1}{|\mathcal{C}|}v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}\right).$$

Sea $\gamma\left(N,v,\mathcal{F}\right)$ otra regla de asignación que verifica la propiedad de la influencia. Al ser el juego $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$ simétrico, resulta que

$$\gamma\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\beta\, I\left(N,v,\mathcal{F}\right).$$

Se ha de probar que $\beta = \alpha$. Para ello, sea $i \in N$, tal que $i \in \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$. Aplicando la eficiencia por componentes se tendría que

$$\sum_{i \in M} \gamma_i (N, v, \mathcal{F}) = v(M) = \sum_{i \in M} \pi_i (N, v, \mathcal{F}),$$

de donde,

$$\sum_{i \in M} \beta \, I_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{i \in M} \alpha \, I_i (N, v, \mathcal{F}),$$

y de aquí,

$$\sum_{i \in M} (\beta - \alpha) \; I_i (N, v, \mathcal{F}) = 0.$$

Puesto que, para $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, se verifica $\sum_{i \in M} I_i (N, v, \mathcal{F}) \neq 0$, se deduce que $\beta = \alpha$ y, por tanto, $\gamma (N, v, \mathcal{F}) = \pi (N, v, \mathcal{F})$.

En el caso $\mathcal{C} = \emptyset$, es evidente que $\gamma (N, v, \mathcal{F}) = \pi (N, v, \mathcal{F}) = \mathbf{0}$ al ser $I (N, v, \mathcal{F}) = \mathbf{0}$. $\square$

El sistema $(N, \mathcal{F})$ puede incumplir alguna de las características de estabilidad para la intersección o expresión única de cada coalición factible no unitaria en función de soportes no unitarios y, sin embargo, ser el valor de posición generalizado la única regla de asignación que verifica la propiedad de influencia. Ello puede observarse en el Ejemplo 4.15 (pág. 149) ya que, en ese caso, el sistema de coaliciones factibles no es estable para la intersección y, el valor de posición generalizado,

$$\pi (N, v, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \, I(N, v, \mathcal{F}),$$

es la única regla de asignación que verifica la propiedad de influencia.

Proposición 4.21 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión tal que $v^{\mathcal{C}} = \alpha u_{\mathcal{A}}$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, el valor de posición generalizado es la única regla de asignación que verifica las propiedades del soporte superfluo e influencia.*

Demostración: Al ser $v^{\mathcal{C}} = \alpha u_{\mathcal{A}}$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces para $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{C}$,

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{J}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor de posición generalizado verifica la propiedad del soporte superfluo y, por ello,

$$\pi(N, v, \mathcal{F}) = \cdots = \pi(N, v, \mathcal{F}'), \text{ con } \mathcal{F}' = \overline{\mathcal{A}} \cup \{\{j\} : \{j\} \in \mathcal{F}\}.$$

De forma análoga, si $\gamma(N, v, \mathcal{F})$ es otra regla de asignación que verifica la propiedad del soporte superfluo, se tiene

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \cdots = \gamma(N, v, \mathcal{F}').$$

Ahora bien, el juego $v^{\mathcal{C}}|_{\mathcal{F}'}$ es un juego simétrico ya que

$$v^{\mathcal{C}}|_{\mathcal{F}'}(\mathcal{J}) = \alpha \Longleftrightarrow \mathcal{J} = \mathcal{A}.$$

Entonces, aplicando la proposición anterior, resulta que el valor de posición generalizado es la única regla de asignación que verifica la propiedad de la influencia. Por tanto, se deduce

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}') = \pi(N, v, \mathcal{F}'),$$

y, finalmente,

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \gamma(N, v, \mathcal{F}') = \pi(N, v, \mathcal{F}') = \pi(N, v, \mathcal{F}).$$

$\square$

Obsérvese que la proposición anterior implica que si $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ tal que $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = (\mathcal{C}, \alpha u_{\mathcal{A}})$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces

$$\pi_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|\mathcal{A}|} \displaystyle\sum_{C \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}} \dfrac{1}{|C|} & \text{si } \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} : i \in B\}$.

Esta conclusión conecta con la caracterización axiomática dada por Faigle [29] para el valor de posición definido sobre *juegos de comunicación general*, la cual se describe seguidamente.

Sean $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de jugadores y $\mathcal{L}$ una familia no vacía de subconjuntos de N. Un *juego de comunicación general relativo a* $(N, \mathcal{L})$ es una función

$$v : 2^{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\emptyset) = 0.$$

Los elementos de $\mathcal{L}$ son denominados jugadores *ficticios* y, sobre el conjunto de juegos de comunicación general relativos a $(N, \mathcal{L})$, denotado por $CG\,(N, \mathcal{L})$, se define el *valor de posición* como

$$P : CG\,(N, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad P(v) = (P_1(v), \ldots, P_n(v)),$$

donde

$$P_i(v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\{L \in \mathcal{L} : i \in L\}} \frac{1}{|L|}\, \Phi_L\,(\mathcal{L}, v) & \text{si } \{L \in \mathcal{L} : i \in L\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo $\Phi\,(\mathcal{L}, v)$ el valor de Shapley, asociado al juego de comunicación general relativo a $(N, \mathcal{L})$.

El valor de posición definido es una regla de asignación que distribuye el valor $v\,(\mathcal{L})$ entre los jugadores pertenecientes a N y Faigle demuestra que es la única regla de asignación lineal definida sobre el conjunto de juegos de comunicación general verificando que

$$P_i(u_{\mathcal{S}}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\{L \in \mathcal{L} : i \in L,\, L \in \mathcal{S}\}} \frac{1}{|L|\;|\mathcal{S}|} & \text{si } \{L \in \mathcal{L} : i \in L,\ L \in \mathcal{S}\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $u_{\mathcal{S}}$ es el juego de unanimidad correspondiente a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Es inmediato que, para cualquier terna $(N, v, \mathcal{F})$, siendo $(N, \mathcal{F})$ un sistema $\cup$-estable y (N, v) un juego de utilidad transferible, el juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ asociado a una terna $(N, v, \mathcal{F})$ es un juego de comunicación relativo a $(N, \mathcal{C})$ y $\pi(N, v, \mathcal{F}) = P\left(v^{\mathcal{C}}\right)$. Por tanto, puede enunciarse el siguiente resultado.

Proposición 4.22 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión tal que $v^{\mathcal{C}} = u_{\mathcal{A}}$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces, el valor de posición generalizado es la única regla de asignación lineal tal que*

$$\pi_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{A}|} \displaystyle\sum_{C \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A}} \dfrac{1}{|C|} & si\ \mathcal{C}_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

para cada $i \in N$.

4.3 El valor de posición en hipergrafos y sistemas $\cup$-estables

Las situaciones de comunicación, (N, v, E), son un caso particular de estructuras de cooperación $(N, v, \mathcal{F})$ estables para la unión. Ahora bien, las estructuras $\cup$-estables no constituyen la única línea de generalización de las situaciones de comunicación ya que Myerson [54], en (1980), generalizó su idea de modelar la cooperación parcial mediante un grafo de comunicación entre pares de jugadores, a través de las denominadas estructuras de conferencias aunque considera, en su estudio, juegos cooperativos de utilidad no transferible. Por otra parte, van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) [58] extienden la idea original de Myerson hacia *situaciones de comunicación en hipergrafos*.

Con respecto a las estructuras de conferencias se estableció, en el tercer capítulo, una estrecha conexión con los sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables. Ahora, el objetivo de esta sección es el de ilustrar la relación existente entre las situaciones de comunicación en hipergrafos y las estructuras de cooperación $\cup$-estables haciendo hincapié en los conceptos de valor de posición definidos sobre ambas. Para ello, se exponen, brevemente, las ideas básicas referentes a las situaciones de comunicación en hipergrafos.

En general, se entiende por *situación de comunicación en hipergrafos*, a una terna $(N, v, \mathcal{H})$ en la que (N, v) es un juego de utilidad transferible cero-normalizado y $(N, \mathcal{H})$ un hipergrafo, con $\mathcal{H} \subseteq \{H \in 2^N : |H| \geq 2\}$. En ella, se interpreta que la comunicación es posible únicamente a través de las conferencias $H \in \mathcal{H}$. Así, dada una coalición $S \subseteq N$, se definen las coaliciones factibles o *conjuntos de interacción* de la coalición S como todos aquellos conjuntos obtenidos de la siguiente forma:

1. Para todo $i \in S$, $\{i\}$ es un conjunto de interacción de S.

2. Si $H \in \mathcal{H}$ y $H \subseteq S$, entonces H es un conjunto de interacción de S.

3. Si T_1 y T_2 son conjuntos de interacción de S y verifican que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, entonces $T_1 \cup T_2$ es un conjunto de interacción de S.

A partir de los conjuntos de interacción de cualquier coalición, se define el *juego restringido por el hipergrafo de comunicación* de forma similar al juego restringido definido por un sistema de coaliciones factibles $\cup$-estable que contiene a las coaliciones unitarias. También, de manera análoga, se define el *juego de conferencias sobre el conjunto* $\mathcal{H}$ y sobre él se construye el valor de posición.

Sea $S \subseteq N$ y considérese el conjunto parcialmente ordenado constituido por los conjuntos de interacción de S junto con la relación de inclusión. Del proceso de formación de los conjuntos de interacción de S se deduce que sus elementos maximales dan lugar a una partición de S denotada por $S/\mathcal{H}$ y, así, el *juego restringido por el hipergrafo de comunicación*, $(N, r^v_{\mathcal{H}})$, se define como

$$r^v_{\mathcal{H}} : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r^v_{\mathcal{H}}(S) = \sum_{C \in S/\mathcal{H}} v(C), \quad \forall S \subseteq N.$$

El *juego de conferencias*, $(\mathcal{H}, r^v_N)$, viene determinado por

$$r^v_N : 2^{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r^v_N(\mathcal{A}) = r^v_{\mathcal{A}}(N) = \sum_{C \in N/\mathcal{A}} v(C), \quad \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}.$$

Es decir, el valor de cualquier subconjunto de conferencias, $\mathcal{A}$, es el valor de la coalición N en el juego restringido correspondiente a la situación de comunicación en hipergrafos $(N, v, \mathcal{A})$.

Con las nociones introducidas, puede establecerse la siguiente relación.

Teorema 4.23 *Sea $(N, v, \mathcal{H})$ una situación de comunicación en hipergrafos. Existe una estructura de cooperación $(N, v, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ estable para la unión tal que los correspondientes juegos restringidos $\left(N, v^{\mathcal{F}(\mathcal{H})}\right)$, $(N, r^v_{\mathcal{H}})$ coinciden, y los juegos de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, $(\mathcal{H}, r^v_N)$ verifican que*

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}, \quad \exists \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C} \quad \textit{tal que} \quad v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = r^v_N(\mathcal{A}).$$

Recíprocamente, si $(N, v, \mathcal{F})$ es una estructura de cooperación estable para la unión, con (N, v) cero-normalizado, entonces $(N, v, \mathcal{C})$ es una situación de comunicación en hipergrafos en la que se verifica

$$r^v_{\mathcal{C}} = v^{\mathcal{F}} \quad \textit{y} \quad r^v_N = v^{\mathcal{C}}.$$

Demostración: Sea $(N, v, \mathcal{H})$ una situación de comunicación en hipergrafos y considérese el conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ constituido por todos los conjuntos de interacción de la coalición N. Por construcción, $(N, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ es un sistema ∪-estable y, en la estructura de cooperación $(N, v, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$, la definición del $\mathcal{F}(\mathcal{H})$-juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}(\mathcal{H})}\right)$ coincide con la correspondiente al juego restringido por el hipergrafo de comunicación $(N, r^v_{\mathcal{H}})$ ya que, para toda coalición $S \subseteq N$, $C_{\mathcal{F}(\mathcal{H})}(S) = S/\mathcal{H}$.

Considérese ahora $\mathcal{A} \in 2^{\mathcal{H}}$. Por definición,

$$r_N^v(\mathcal{A}) = r_{\mathcal{A}}^v(N) = \sum_{M \in N/\mathcal{A}} v(M).$$

En el sistema $\cup$-estable construido anteriormente, $(N, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$, sea

$$\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) : F \subseteq M \quad \text{para algún} \quad M \in N/\mathcal{A}\}.$$

Es inmediato probar que $(N, \mathcal{F}')$ es un sistema $\cup$-estable y, por tanto, puede considerarse la base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{F}'$.

La base $\mathcal{B}'$ está contenida en la base $\mathcal{B}$ del sistema $\cup$-estable $(N, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$. En efecto, si ello no fuese cierto existiría un elemento $B \in \mathcal{B}'$ que no pertenece a la base $\mathcal{B}$, lo que significa, por definición de base que

$$\exists\, S, T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})\,, \quad S, T \neq B \quad \text{con} \quad S \cap T \neq \emptyset \quad \text{y} \quad S \cup T = B.$$

Como $B \in \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{F}'$, resulta que $S, T \in \mathcal{F}'$ y, por tanto, $B \notin \mathcal{B}'$ en contra de lo supuesto.

Se prueba que $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = r_N^v(\mathcal{A})$, estando constituidos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ por los soportes con cardinal mayor o igual que dos pertenecientes a $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{F}'$ respectivamente.

Obviamente $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ y se tiene que

$$\overline{\mathcal{B}'} = \mathcal{F}' \quad \text{y} \quad C_{\mathcal{F}'}(N) = \{M : M \in N/\mathcal{A}\}.$$

Además, las Definiciones 2.10 y 4.1 así como el hecho de ser el juego (N, v) cero-normalizado implican que

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = v^{\overline{\mathcal{C}'}}(N) = v^{\overline{\mathcal{B}'}}(N) = v^{\mathcal{F}'}(N) = \sum_{M \in C_{\mathcal{F}'}(N)} v(M) = r_N^v(\mathcal{A})\,.$$

La demostración del recíproco es inmediata. $\square$

A la vista de las definiciones introducidas referentes a las situaciones de comunicación en hipergrafos y del resultado anterior, puede afirmarse que éstas dan lugar a estructuras de cooperación estables para la unión, siendo las coaliciones factibles los denominados conjuntos de interacción de la coalición N. Ahora bien, dada una estructura de cooperación estable para la unión, unitaria, en general, existen varias situaciones de comunicación en hipergrafos cuyos conjuntos de interacción de la coalición N coinciden con las coaliciones factibles del sistema $\cup$-estable unitario (obviamente, una de las situaciones de comunicación en hipergrafos será aquélla cuyo conjunto de conferencias $\mathcal{H}$ está constituido por los soportes no unitarios de la base).

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que el valor de posición generalizado definido por van den Nouweland, Borm y Tijs en *Allocation rules for hypergraph communication situations* y el definido, en este capítulo, para estructuras de cooperación $\cup$-estables son diferentes.

Previamente, se recuerda que si $(N, v, \mathcal{H})$ es una situación de comunicación en hipergrafos, el valor de posición [58] $\pi(N, v, \mathcal{H})$ es definido, para $i \in N$, como

$$\pi_i(N, v, \mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}_i} \frac{1}{|H|} \Phi_H(\mathcal{H}, r_N^v),$$

donde $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : i \in H\}$.

Ejemplo 4.24 *Sea $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(S) = |S| - 1$, para cada coalición S no vacía. Considérese el hipergrafo*

$$\mathcal{H} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\},$$

en el que los conjuntos de interacción, para la coalición N, son

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

El juego de conferencias asociado $(\mathcal{H}, r_N^v)$ viene dado por los siguientes valores de su función característica:

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$	*Conjuntos de interacción de* N *en* $(N, v, \mathcal{A})$	$N/\mathcal{A}$	$r_N^v(\mathcal{A})$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0
$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	1
$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	1
$\{\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{4,5\}\}$	$\{\{4,5\}\}$	$\{\{4,5\}\}$	1
$\{\{1,2\},\{2,3\}\}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	2
$\{\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	2
$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3
$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3
$\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3
$\{\{2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3
$\mathcal{H}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3

(En los conjuntos de interacción y en $N/\mathcal{A}$, no aparecen los conjuntos unitarios ya que el juego es cero-normalizado).

El valor de Shapley asociado al juego de conferencias viene determinado por

$$\Phi_{\{1,2\}}(\mathcal{H}, r_N^v) = \Phi_{\{2,3\}}(\mathcal{H}, r_N^v) = \frac{1}{2},$$
$$\Phi_{\{1,2,3\}}(\mathcal{H}, r_N^v) = \Phi_{\{4,5\}}(\mathcal{H}, r_N^v) = 1,$$

y, por tanto, el valor de posición es $\pi(N, v, \mathcal{H}) = \left(\frac{7}{12}, \frac{10}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Por otro lado, sea la estructura de cooperación $\cup$-estable $(N, v, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$. Entonces, el conjunto de coaliciones factibles es

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{4,5\}\}$$

y, de aquí, su base es

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}\},$$

de donde

$$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}.$$

El juego de conferencias $(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}})$ viene dado en la siguiente tabla:

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$	$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0
$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	$\{\{1,2\}\}$	1
$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	$\{\{2,3\}\}$	1
$\{\{4,5\}\}$	$\{\{4,5\}\}$	$\{\{4,5\}\}$	1
$\{\{1,2\},\{2,3\}\}$	$\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$	$\{\{1,2,3\}\}$	2
$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	$\{\{1,2\},\{4,5\}\}$	2
$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$	2
$\mathcal{C}$	$\mathcal{F} \setminus \{\{i\} : i \in N\}$	$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$	3

El valor de Shapley, para cada soporte no unitario, es

$$\Phi_{\{1,2\}}(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}) = \Phi_{\{2,3\}}(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}) = \Phi_{\{4,5\}}(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}) = 1$$

y, en consecuencia, el valor de posición resulta ser

$$\pi(N, v, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Nótese que la situación de comunicación en hipergrafos del ejemplo anterior se corresponde con una situación de comunicación en grafos y, en este caso, los valores de posición derivados de ambas situaciones de comunicación no serían los mismos.

Sin embargo, si se considera el valor de posición definido sobre la estructura de cooperación $\cup$-estable $(N, v, \mathcal{F}(\mathcal{H}))$ y el correspondiente a la situación de comunicación en grafos, la coincidencia sería completa. (No puede olvidarse que los hipergrafos son sistemas de conjuntos concebidos como una extensión natural de los grafos, [25, pág. 383]).

En general, no da igual considerar el valor de posición generalizado sobre cualquier situación de comunicación en hipergrafos ya que, en muchos casos, es mejor aquélla cuyo hipergrafo está formado por el conjunto de soportes no unitarios que se deriva del sistema de coaliciones factibles o conjuntos de interacción a que da lugar; esto es, si $(N, v, \mathcal{H})$ y $(N, v, \mathcal{H}')$ son situaciones de comunicación en hipergrafos en las que existe $C \in \mathcal{H}$ tal que $C = A \cup B$, con $A, B \in \mathcal{H}$, $A, B \neq C$, $A \cap B \neq \emptyset$, y $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \{C\}$, se razonará cómo a alguna coalición de jugadores le interesará más la determinación del valor de posición generalizado en la situación de comunicación en hipergrafos $(N, v, \mathcal{H}')$.

En efecto, en primer lugar, es inmediato que los conjuntos de interacción de N o los sistemas de coaliciones factibles $\cup$-estables generados por ambos hipergrafos son el mismo y, por tanto, en las situaciones de comunicación $(N, v, \mathcal{H})$ y $(N, v, \mathcal{H}')$, los juegos de conferencias asociados

$$v^{\mathcal{H}} : 2^{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v^{\mathcal{H}'} : 2^{\mathcal{H}'} \longrightarrow \mathbb{R},$$

están estrechamente relacionados al ser

$$v^{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}'} = v^{\mathcal{H}'} \quad \text{y} \quad v^{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{H}').$$

Ahora, considérese $\Phi_A\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)$ y $\Phi_A\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$. Se probará que, si el juego sobre las conferencias es monótono, entonces $\Phi_A\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) < \Phi_A\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$. Para ello, de una parte,

$$\begin{aligned}
\Phi_A\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} : A \notin \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S} \cup \{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} : A \notin \mathcal{S},\, C \in \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S} \cup \{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
&+ \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} : A \notin \mathcal{S},\, C \notin \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S} \cup \{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: A\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right],$$

ya que $v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}) = 0$ por ser $C = A\cup B \in \mathcal{S}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Phi_A\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}': A\notin\mathcal{S}\}} \gamma'(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S}\cup\{A\}) - v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S})\right] \\ &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: A\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \gamma'(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{A\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right],\end{aligned}$$

ya que $\mathcal{H}' = \mathcal{H}\setminus\{C\}$. Además, llamando $|\mathcal{S}| = s$, $|\mathcal{H}| = h$, $|\mathcal{H}'| = h' = h-1$ y recordando que $0 \leq s \leq h-2$ (si $s = h-1$, entonces $|\mathcal{S}\cup\{A\}| = h$ con lo que $\mathcal{S}\cup\{A\} = \mathcal{H}$ y $C \in \mathcal{S}$ ya que $A \neq C$), resulta ser

$$\gamma(\mathcal{S}) = \frac{s!(h-s-1)!}{h!}, \quad \gamma'(\mathcal{S}) = \frac{s!(h-s-2)!}{(h-1)!},$$

y, de ahí

$$\frac{\gamma'(\mathcal{S})}{\gamma(\mathcal{S})} = \frac{h}{h-s-1} > 1 \Longrightarrow \gamma'(\mathcal{S}) > \gamma(\mathcal{S}).$$

Luego, $\Phi_A\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) < \Phi_A\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$ y, por analogía, se puede deducir que $\Phi_B\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) < \Phi_B\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$.

De los razonamientos anteriores se deduce, inicialmente, que los jugadores pertenecientes a las conferencias A y B tendrán una expectativa razonable de aumento en su valor de posición y pensarán en un incremento (al pasar de la situación $(N, v, \mathcal{H})$ a $(N, v, \mathcal{H}')$),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|A|}\left[\Phi_A\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) - \Phi_A\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)\right], \\ &\frac{1}{|B|}\left[\Phi_B\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) - \Phi_B\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)\right].\end{aligned}$$

Además, el cálculo del valor de Shapley correspondiente a la conferencia $C = A\cup B$ no se realizará en la situación de comunicación en hipergrafos $(N, v, \mathcal{H}')$ y, se verifica que

$$\sum_{H\in\mathcal{H}} \Phi_H\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) = \sum_{H\in\mathcal{H}'} \Phi_H\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) = v^{\mathcal{H}}\left(\mathcal{H}\right) = v^{\mathcal{H}'}\left(\mathcal{H}'\right).$$

Es decir, se reparte lo mismo, con un elemento menos con el que repartir, con expectativas de crecimiento por parte de los jugadores pertenecientes a las conferencias A y B y, sabiendo que, si el juego (N, v) es superaditivo y cero-normalizado, entonces $\Phi_H\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) \geq 0$, $\Phi_H\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) \geq 0$ (ver demostración en pág. 215). Lógicamente, los jugadores pertenecientes a la intersección de A y B tendrán una expectativa de aumento doble en su valor de posición.

Por otra parte, por la eficiencia del valor de posición se tiene que, para cada coalición factible maximal M de N,

$$\sum_{i\in M} \pi_i\left(N, v, \mathcal{H}\right) = \sum_{i\in M} \pi_i\left(N, v, \mathcal{H}'\right) = v(M),$$

y esto hace que los jugadores pertenecientes a diferentes coaliciones factibles maximales de N y distintas a la de los jugadores de A y B (que evidentemente pertenecen a la misma coalición factible maximal de N), tengan una situación semejante y no experimenten ninguna modificación en su valor de posición.

Por tanto, se puede afirmar que los jugadores de A y B tienen una expectativa razonable de crecimiento de su valor de posición en el cambio de $(N, v, \mathcal{H})$ a $(N, v, \mathcal{H}')$ y los jugadores pertenecientes a $A \cap B$, el doble. Lógicamente, este incremento esperado será a costa de elementos pertenecientes a la misma componente maximal de N en la que estén los elementos A y B (si estuviesen sólo A y B formando una coalición factible maximal de N, habría un beneficio único para los jugadores de $A \cap B$, en detrimento de los jugadores de A y B que no estén en la misma) ya que lo que hay que repartir entre todos los jugadores es lo mismo que había en $(N, v, \mathcal{H})$ y será $v(M)$. Más aún, puede asegurarse que si $\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)$ es un juego convexo, forzosamente $\Phi_D\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) \geq \Phi_D\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$ para algún elemento $D \in \mathcal{H}$ que forme parte de la misma coalición factible maximal de N en la que participan A y B, con

$D \neq A$, $D \neq B$. Ello se demuestra con el siguiente razonamiento,

$$\begin{aligned}
\Phi_D\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
&+ \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_D\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right) &= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}': D\notin\mathcal{S}\}} \gamma'(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S})\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \gamma'(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{S})\right] \\
&= \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \gamma'(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right].
\end{aligned}$$

Entonces, la diferencia $\Phi_D\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) - \Phi_D\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$ es igual a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
+ & \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \left[\gamma(\mathcal{S}) - \gamma'(\mathcal{S})\right]\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
= & \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\in\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S})\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right] \\
- & \sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{H}: D\notin\mathcal{S},\, C\notin\mathcal{S}\}} \left[\gamma'(\mathcal{S}) - \gamma(\mathcal{S})\right]\left[v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S})\right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, por cada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, con $D \notin \mathcal{S}$ y $C \in \mathcal{S}$, existe $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{C\}$. Obviamente, $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{H}$ con $D \notin \mathcal{S}'$. Si se comparan los sumandos correspondientes, se observa que

$$\gamma(\mathcal{S}) = \gamma'(\mathcal{S}') - \gamma(\mathcal{S}'), \quad v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}) \geq v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}'\cup\{D\}) - v^{\mathcal{H}}(\mathcal{S}'),$$

donde la primera igualdad se sigue, de forma directa, del hecho de ser $|\mathcal{S}| = s$ y $|\mathcal{S}'| = s - 1$. La desigualdad es debida a que $\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)$ es un juego convexo. Por tanto, $\Phi_D\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right) \geq \Phi_D\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$.

Obsérvese que, en el razonamiento efectuado, no se hace alusión alguna a la pertenencia de D a la misma coalición factible maximal que A y B. Como consecuencia, la conclusión obtenida es válida para cualquier $D \in \mathcal{H}$, $D \neq A$, $D \neq B$. La igualdad se dará en el caso de conferencias $D \in \mathcal{H}$ que no estén incluidas en la misma coalición factible maximal de N que las conferencias A y B.

No obstante, la expectativa de crecimiento en $(N, v, \mathcal{H}')$ para los elementos de A, de B y de $A \cap B$ puede verse descompensada debido a que no les corresponderá la cuota correspondiente a $\Phi_{A\cup B}\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)$. A pesar de ello,

1.- Todos los jugadores pertenecientes a una misma coalición factible maximal M de N no pueden perder, ni todos pueden ganar ya que, en el cambio de $(N, v, \mathcal{H})$ a $(N, v, \mathcal{H}')$, no hay disminución en la ganancia general $v(M)$.

2.- Si los jugadores de A y B que no están en la intersección ganan, entonces ganarán con más razón los jugadores pertenecientes a $A \cap B$. Es seguro que la ganancia será a costa de los demás elementos de la misma coalición factible maximal de N en la que están los jugadores de A y B.

3.- Si los jugadores de A y B que no están en la intersección pierden, entonces los jugadores que pertenecen a $A \cap B$ tienen aún más expectativas de ganar ya que no todos pueden perder y los jugadores de la misma coalición factible maximal de N que no están en la unión de A y B no tienen ninguna expectativa razonable de crecimiento en su valor asociado.

Todo ello conduce a que los jugadores de A, de B y, en especial, los de la intersección, no aceptarán $(N, v, \mathcal{H})$ en lugar de $(N, v, \mathcal{H}')$ ya que los beneficios en las coaliciones factibles maximales de la gran coalición son los mismos y en $(N, v, \mathcal{H}')$ tienen una posición más ventajosa. Para ello, basta que los elementos de la intersección se retiren de la conferencia $C = A \cup B$.

En el siguiente ejemplo se ponen de manifiesto los razonamientos efectuados anteriormente.

Ejemplo 4.25 *Considérese el conjunto* $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *de jugadores y las situaciones de comunicación en hipergrafos* $(N, v, \mathcal{H})$ *y* $(N, v, \mathcal{H}')$*, con*

$$\mathcal{H} = \{\{1,2,3,4\}, \{3,4,7\}, \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{8,9\}\},$$

$$\mathcal{H}' = \{\{1,2,3,4\}, \{3,4,7\}, \{3,4,5,6\}, \{8,9\}\} = \mathcal{H} \setminus \{\{1,2,3,4,5,6\}\},$$

y $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$*, que viene definido por*

$$v(S) = \begin{cases} |S|^2 & si \ \ |S| \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

En ambos casos, el conjunto de coaliciones factibles o conjuntos de interacción de N *es*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \; & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{1,2,3,4\}, \{3,4,7\}, \\ & \{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{8,9\}, \{1,2,3,4,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \\ & \{1,2,3,4,5,6,7\}\}. \end{aligned}$$

Los juegos de conferencias, $\left(\mathcal{H}, v^{\mathcal{H}}\right)$ *y* $\left(\mathcal{H}', v^{\mathcal{H}'}\right)$*, se pueden calcular fácilmente (están tabulados en la página siguiente) y permiten establecer los valores de Shapley para las distintas conferencias de* $\mathcal{H}$ *y* $\mathcal{H}'$*, así como los valores de posición* $\pi(N, v, \mathcal{H})$ *y* $\pi(N, v, \mathcal{H}')$*. Obsérvese que hay dos coaliciones factibles maximales de* N*:* $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ *y* $\{8,9\}$*.*

	$(N, v, \mathcal{H})$	$(N, v, \mathcal{H}')$	Δ	
$\Phi_{\{1,2,3,4\}}$	9	58/3	+31/3	
$\Phi_{\{3,4,5,6\}}$	9	58/3	+31/3	
$\Phi_{\{3,4,7\}}$	34/3	31/3	-1	$\sum \Delta = 59/3$
$\Phi_{\{1,2,3,4,5,6\}}$	59/3	–	–	
$\Phi_{\{8,9\}}$	4	4	0	

	$(N, v, \mathcal{H})$	$(N, v, \mathcal{H}')$	Δ
π_1	$199/36$	$174/36$	$-25/36$
π_2	$199/36$	$174/36$	$-25/36$
π_3	$416/36$	$472/36$	$56/36$
π_4	$416/36$	$472/36$	$56/36$
π_5	$199/36$	$174/36$	$-25/36$
π_6	$199/36$	$174/36$	$-25/36$
π_7	$136/36$	$124/36$	$-12/36$
π_8	2	2	0
π_9	2	2	0

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}'$	$C_{\mathcal{F}}(N)^{\star}$	$v^{\mathcal{H}}(\mathcal{A})$
$\emptyset$		$\emptyset$	0
$\{1,2,3,4\}$		$\{1,2,3,4\}$	16
$\{3,4,7\}$		$\{3,4,7\}$	9
$\{3,4,5,6\}$		$\{3,4,5,6\}$	16
$\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\}$	36
$\{8,9\}$		$\{8,9\}$	4
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\}$		$\{1,2,3,4,7\}$	25
$\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\}$		$\{1,2,3,4,5,6\}$	36
$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\}$	36
$\{1,2,3,4\},\{8,9\}$		$\{1,2,3,4\},\{8,9\}$	20
$\{3,4,7\},\{3,4,5,6\}$		$\{3,4,5,6,7\}$	25
$\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	49
$\{3,4,7\},\{8,9\}$		$\{3,4,7\},\{8,9\}$	13
$\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\}$	36
$\{3,4,5,6\},\{8,9\}$		$\{3,4,5,6\},\{8,9\}$	20
$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	40
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{3,4,5,6\}$		$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	49
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	49
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{8,9\}$		$\{1,2,3,4,5,7\},\{8,9\}$	29
$\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\}$	36
$\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\{8,9\}$		$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	40
$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	40
$\{3,4,7\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	49
$\{3,4,7\},\{3,4,5,6\},\{8,9\}$		$\{3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	29
$\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	53
$\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	40
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	49
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{3,4,5,6\},\{8,9\}$	$\mathcal{H}'$	$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	53
$\{1,2,3,4\},\{3,4,7\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	53
$\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	40
$\{3,4,7\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\},\{8,9\}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	53
$\mathcal{H}$	—	$\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9\}$	53
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}'$	$C_{\mathcal{F}}(N)^{\star}$	$v^{\mathcal{H}'}(\mathcal{A})$

$\star$: Se han omitido las coaliciones factibles unitarias en $C_{\mathcal{F}}(N)$ ya que el juego es cero-normalizado.

4.4 Otras caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson

Teniendo en cuenta que tanto el valor de Myerson como el valor de posición generalizado son reglas de asignación para estructuras de cooperación $\cup$-estables, parece oportuno plantearse si el valor de Myerson generalizado satisface las propiedades que caracterizan al valor de posición. Éste es el sentido de la primera parte de esta sección en la que se probará que el valor de Myerson generalizado satisface la propiedad del soporte superfluo pero no tiene la propiedad de influencia. No obstante, a semejanza de la propiedad de influencia, podrá definirse el concepto de regla de asignación *anónima para los jugadores* que permitirá una caracterización axiomática del valor de Myerson generalizado para una clase especial de estructuras de cooperación $\cup$-estables.

En la segunda parte, la introducción de otras propiedades para reglas de asignación, inspiradas en aquellas que verifica el valor de posición generalizado, darán lugar a nuevas caracterizaciones axiomáticas para el valor de Myerson.

Teorema 4.26 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad del soporte superfluo.*

Demostración: Sean $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ y $H \in \mathcal{C}$ un soporte superfluo. Se ha de probar que

$$\mu\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \mu\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right).$$

Para ello, al ser

$$\begin{aligned} \mu_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S)\left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})\right], \\ \mu_i\left(N, v, \overline{\mathcal{B} \setminus \{H\}}\right) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S)\left[v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S) - v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S \setminus \{i\})\right], \end{aligned}$$

es suficiente demostrar que $v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S)$, para toda $S \subseteq N$.

En efecto, por un lado,

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}_S}(N)} v(T),$$

ya que $C_{\mathcal{F}}(S) = C_{\mathcal{F}_S}(N)$ por la Proposición 3.16.

Si $\mathcal{B}_S$ es la base de $\mathcal{F}_S$ y $\mathcal{C}_S = \{C \in \mathcal{C} : C \subseteq S\}$, se tiene entonces que $\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}$ y, además,

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) = v^{\overline{\mathcal{C}_S}}(N) = v^{\mathcal{F}_S}\left(N\right) = v^{\mathcal{F}}\left(S\right)$$

puesto que (N, v) es cero-normalizado.

Por otro lado, utilizando un razonamiento análogo,

$$v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S) = \sum_{T \in C_{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S)} v(T) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}'_S}(N)} v(T),$$

ya que $C_{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S) = C_{\mathcal{F}'_S}(N)$ con $\mathcal{F}'_S = \left\{F \in \overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}} : F \subseteq S\right\}$.

Si $\mathcal{B}'_S$ es la base de $\mathcal{F}'_S$ se tiene que $\mathcal{B}'_S = \mathcal{B}_S \setminus \{H\}$, $\mathcal{C}'_S \subseteq \mathcal{C}$ y

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}'_S\right) = v^{\overline{\mathcal{C}'_S}}(N) = v^{\mathcal{F}'_S}\left(N\right) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}\left(S\right).$$

El hecho de ser $\mathcal{B}'_S = \mathcal{B}_S \setminus \{H\}$ y que $H \in \mathcal{C}$ sea un soporte superfluo, implica, finalmente, que

$$v^{\mathcal{F}}\left(S\right) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S \setminus \{H\}\right) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}'_S\right) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}\left(S\right).$$

$\square$

En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto que el valor de Myerson generalizado no verifica la propiedad de influencia.

Ejemplo 4.27 *Considérese la estructura de cooperación estable para la unión dada en el Ejemplo 3.26. En ella, el valor de Myerson generalizado venía dado por*

$$\mu(N, v, \mathcal{F}) = \left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{5}{12}\right),$$

y, en el Ejemplo 4.15, se comprobó que dicha estructura de cooperación $\cup$*-estable es una terna anónima para los soportes en la que el vector de influencias es*

$$I(N, v, \mathcal{F}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Es inmediato que el valor de Myerson generalizado no satisface la propiedad de influencia ya que debería existir $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{5}{12}\right) = \alpha \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

lo cual es imposible.

Sin embargo, tal como se ha indicado en la introducción a esta sección, puede definirse, para reglas de asignación, una propiedad análoga a la de influencia que permitirá una caracterización axiomática del valor de Myerson en el conjunto SEI^N.

Definición 4.28 *Una terna* $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ *se denomina anónima para los jugadores si existe una función* $f : \{0, 1, \ldots, |D|\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$v^{\mathcal{F}}(S) = f(|S \cap D|)$$

para todo $S \in 2^N$*, donde* $D = \{i \in N : |\mathcal{C}_i| > 0\}$.

Definición 4.29 *Una regla de asignación $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es anónima para los jugadores si, para toda estructura de cooperación $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ anónima para los jugadores y para todo $i \in N$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\gamma_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \alpha & si\ i \in D, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Proposición 4.30 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de ser anónima para los jugadores.*

Demostración: Sea $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ anónima para los jugadores y sea $D = \{i \in N : |\mathcal{C}_i| > 0\}$.

Si $D = \emptyset$, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = f(|S \cap \emptyset|) = f(|\emptyset|) = f(0)$, para toda $S \subseteq N$. Tomando $S = \emptyset$, $v^{\mathcal{F}}(\emptyset) = 0 = f(0)$ y, para todo $i \in N$, se tiene que

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})\right] = 0.$$

Supóngase, $D \neq \emptyset$. Si $i \notin D$, obviamente $S \cap D = (S \setminus \{i\}) \cap D$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_i(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\})\right] \\ &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S) \left[f(|S \cap D|) - f(|(S \setminus \{i\}) \cap D|)\right] \\ &= \sum_{\{S \subseteq N : i \in S\}} \gamma(S)\, 0 = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $i, j \in D$, entonces el axioma de simetría para el valor de Shapley indica, en este caso, que

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \mu_j(N, v, \mathcal{F}),$$

y de ahí,

$$f(|D|) = \sum_{i \in D} \mu_i(N, v, \mathcal{F}) = |D|\ \mu_i(N, v, \mathcal{F}),$$

por tanto $\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \dfrac{f(|D|)}{|D|}$, para todo $i \in D$.

En consecuencia, se tiene

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \dfrac{f(|D|)}{|D|} & \text{si } i \in D, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

La propiedad anterior, junto con las propiedades de aditividad y del soporte superfluo, caracteriza axiomáticamente al valor de Myerson generalizado dentro de una clase especial de sistemas estables para la unión: el conjunto SEI^N, cuya definición fue establecida en la segunda sección de este capítulo.

Teorema 4.31 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la única regla de asignación en SEI^N que verifica las propiedades de aditividad, soporte superfluo y anónima para los jugadores.*

Demostración: A través de los resultados anteriores se ha puesto de manifiesto que el valor de Myerson verifica todas las propiedades indicadas. Por tanto, sólo queda demostrar la unicidad.

Sea, entonces, $\gamma : SEI^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ otra regla de asignación que verifica dichas propiedades. Habrá que demostrar que

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \mu(N, v, \mathcal{F}).$$

Como (N, v) es cero-normalizado

$$v = \sum_{\{T : |T| \geq 2\}} \alpha_T u_T,$$

y, al ser tanto μ como γ reglas de asignación aditivas, es suficiente demostrar que, para todo $T \subseteq N$ con $|T| \geq 2$, se verifica que

$$\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \mu(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para probar esta última igualdad, fijada $T \subseteq N$ con $|T| \geq 2$, se consideran dos casos:

1. Existe una coalición $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$.

2. No existe ninguna coalición $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$.

Se comienza probando la igualdad en el caso 2. Se tiene que, para todo $H \subseteq N$,

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{F}}(H) = \begin{cases} \sum\limits_{L \in C_{\mathcal{F}}(H)} (\alpha u_T)(L) & \text{si } C_{\mathcal{F}}(H) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y, debe ser $u_T(L) = 0$, para toda $L \in C_{\mathcal{F}}(H)$, ya que si existe $L \in \mathcal{F}$ tal que $u_T(L) = 1$, tiene que ser $T \subseteq L$ lo cual está en contradicción con lo supuesto. De ahí, $(\alpha u_T)^{\mathcal{F}} = \theta$ y, por consiguiente, $\mu_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = 0$, para cada $i \in N$.

Por otro lado, si $(\alpha u_T)^{\mathcal{F}} = \theta$, la terna $(N, \alpha u_T, \mathcal{F})$ es anónima para los jugadores, pues existe $f : \{0, 1, \ldots, |D|\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = \cdots = f(|D|) = 0$, tal que $(\alpha u_T)^{\mathcal{F}}(H) = f(|H \cap D|) = 0$, para todo $H \subseteq N$. Por tanto, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \begin{cases} \beta & \text{si } i \in D, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $i \in N$. Aplicando la eficiencia,

$$\sum_{i \in N} \gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = |D|\ \beta = (\alpha u_T)^{\mathcal{F}}(N) = 0,$$

y, bajo el supuesto que $D \neq \emptyset$, resulta ser $\beta = 0$. Entonces,

$$\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \mu(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \mathbf{0}.$$

Si $D = \emptyset$, entonces para cada $i \in N$, sólo pueden darse dos posibilidades. Si $\{i\} \notin \mathcal{F}$, entonces $i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$ y $\gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = 0$, por definición. Si $\{i\} \in \mathcal{F}$, entonces $\{i\} \in C_{\mathcal{F}}(N)$ y, aplicando la eficiencia en las componentes,

$$\gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = (\alpha u_T)^{\mathcal{F}}(\{i\}) = 0,$$

ya que $|T| \geq 2$. Así, $\gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = 0$, para todo $i \in N$.

Se prueba ahora la igualdad en el caso 1. Sea el conjunto $\{F \in \mathcal{F} : T \subseteq F\}$, que es no vacío ya que existe $S \in \mathcal{F}$ tal que $T \subseteq S$, y considérese

$$\overline{T} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : T \subseteq F\}.$$

El conjunto $\overline{T}$ es no vacío y, además, es el menor conjunto factible que contiene a T. De aquí,

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{F}}(H) = \alpha u_{\overline{T}}(H) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \overline{T} \subseteq H, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\mu_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|\overline{T}|} & \text{si } i \in \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, el juego de conferencias asociado a αu_T será,

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \overline{T} \in \overline{\mathcal{A}}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

puesto que,

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} (\alpha u_T)(M) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)} \alpha u_T(M) = \alpha$$

si y sólo si $u_T(M) = 1$, para alguna $M \in C_{\overline{\mathcal{A}}}(N)$.

Ahora bien,

$$u_T(M) = 1 \Longleftrightarrow T \subseteq M, \text{ con } M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F},$$

y al ser $\overline{T} \in \mathcal{F}$ el menor conjunto factible que contiene a T, se tiene

$$u_T(M) = 1 \Longleftrightarrow T \subseteq \overline{T} \subseteq M, \text{ con } M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F}.$$

Por otro lado, como $\overline{T} = \bigcup_{k \in K} B_k$, con $B_k \in \mathcal{C}$, para todo $k \in K$, resulta

$$\overline{T} \subseteq M,\ M \in \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{F} \Longleftrightarrow \{B_k\}_{k \in K} \subseteq \mathcal{A},$$

ya que la expresión de cada coalición factible no unitaria como unión de soportes no unitarios es única. Queda entonces

$$(\alpha u_T)^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \{B_k\}_{k \in K} \subseteq \mathcal{A}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que todos los soportes $B \in \mathcal{C}$ tales que $B \notin \{B_k\}_{k \in K}$, son superfluos para el juego de conferencias. Por tanto, si se aplica sucesivamente la propiedad del soporte superfluo para la regla de asignación γ, resulta

$$\gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}) = \cdots = \gamma(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'),$$

donde $\mathcal{F}' = \left(\overline{\{B_k\}_{k \in K}}\right) \cup (\{\{j\} : \{j\} \in \mathcal{F}\})$.

Como $(\alpha u_T)^{\mathcal{F}'} = \alpha u_{\overline{T}}$, entonces $\alpha u_{\overline{T}}(S) = \alpha u_{\overline{T}}\left(S \cap \overline{T}\right)$, para cualquier $S \subseteq N$, y puesto que $\overline{T} \cap S \subseteq \overline{T}$,

$$\alpha u_{\overline{T}}(S) = \alpha u_{\overline{T}}\left(S \cap \overline{T}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{si } S \cap \overline{T} = \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, el juego $(\alpha u_T)^{\mathcal{F}'}$ es anónimo para los jugadores ya que

$$D = \{i \in N : |\mathcal{C}_i| > 0\} = \overline{T}.$$

y $f(0) = \cdots = f(|D| - 1) = 0$, $f(|D|) = \alpha$.

Al ser γ, por hipótesis, anónima para los jugadores, se tiene que, para todo $i \in N$, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i(N, \alpha u_T, \mathcal{F}') = \begin{cases} \delta & \text{si } i \in \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta ahora la eficiencia

$$\sum_{i \in N} \gamma_i \left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \left|\overline{T}\right| \delta = \alpha,$$

de donde $\delta = \dfrac{\alpha}{\left|\overline{T}\right|}$. Por tanto, para cada $i \in N$,

$$\gamma_i \left(N, \alpha u_T, \mathcal{F}'\right) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\left|\overline{T}\right|} & \text{si } i \in \overline{T}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\square$

Finalmente, se obtienen otras dos caracterizaciones axiomáticas del valor de Myerson generalizado en sistemas estables para la unión, que generalizan las establecidas por van den Nouweland (1993) [59] en situaciones de comunicación.

Definición 4.32 *Sea una estructura de cooperación $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$. El jugador $i \in N$ es superfluo para $(N, v, \mathcal{F})$ si verifica*

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}\left(S \backslash \{i\}\right), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Definición 4.33 *Una regla de asignación $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad del jugador superfluo si, para cualquier jugador superfluo $i \in N$ con respecto a $(N, v, \mathcal{F})$, se tiene que*

$$\gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v, \mathcal{F}_{N \backslash \{i\}}\right).$$

Proposición 4.34 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad del jugador superfluo.*

Demostración: Sea $i \in N$ un jugador superfluo para $(N, v, \mathcal{F})$. Se ha de probar que

$$\mu(N, v, \mathcal{F}) = \mu\left(N, v, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right).$$

Obviamente, para el jugador i, es inmediato que

$$\mu_i\left(N, v, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right) = 0, \text{ ya que } i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(N)} M.$$

Por otro lado,

$$\mu_i(N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{S \subseteq N: i \in S\}} \gamma(S)\left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\})\right] = 0,$$

porque i es un jugador superfluo.

Para $k \in N$, $k \neq i$ y, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\mu_k(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \subseteq N: k \in S\}} \gamma(S)\left[v^{\mathcal{F}}(S) - v^{\mathcal{F}}(S\setminus\{k\})\right], \\
\mu_k\left(N, v, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right) &= \sum_{\{S \subseteq N: k \in S\}} \gamma(S)\left[v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S) - v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S\setminus\{k\})\right],
\end{aligned}$$

es suficiente, para demostrar que ambos valores coinciden, probar que

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S), \quad \text{para todo } S \subseteq N.$$

En efecto,

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\})} v(T), \quad v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)} v(T),$$

y como, por la Proposición 3.18, se verifica que $C_{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\}) = C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)$, se tiene que, para todo $S \subseteq N$, $v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)$. □

Con el propósito de establecer la primera de las caracterizaciones del valor Myerson, se expone previamente el siguiente resultado.

Lema 4.35 *Sea $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una regla de asignación aditiva.*

(a) Si γ satisface la propiedad del jugador superfluo, entonces

$$\gamma\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\gamma\left(N,v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right),\ \textit{para todo}\ \left(N,v,\mathcal{F}\right)\in SE^{N}.$$

(b) Si γ satisface la propiedad de ser anónima para los jugadores, entonces

$$\gamma\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\gamma\left(N,v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right),\ \textit{para todo}\ \left(N,v,\mathcal{F}\right)\in SE^{N}.$$

Demostración: (a) Por la aditividad de γ, es suficiente probar que, para todo $(N,v,\mathcal{F})\in SE^N$, se verifica $\gamma\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)=0$. En efecto, para cualquier $S\subseteq N$,

$$\left(v-v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}}(S)=\sum_{T\in C_{\mathcal{F}}(S)}\left(v-v^{\mathcal{F}}\right)(T)=\sum_{T\in C_{\mathcal{F}}(S)}\left[v\left(T\right)-v^{\mathcal{F}}\left(T\right)\right]=0.$$

Ello indica que todos los jugadores son superfluos para cualquier terna $\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)$, ya que, para todo $i\in N$ y cualquier $S\subseteq N$,

$$\left(v-v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}}(S)=\left(v-v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}}(S\backslash\left\{i\right\})=0.$$

Por tanto, si se toman todos los jugadores pertenecientes a una misma componente maximal $M\in C_{\mathcal{F}}(N)$

$$\gamma\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)=\gamma\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}_{N\backslash\{i\}}\right)=\cdots=\gamma\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}_{N\backslash M}\right),$$

y, para todo $i\in M$,

$$\gamma_i\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)=\gamma_i\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}_{N\backslash M}\right)=0,$$

ya que $i\notin\bigcup_{H\in C_{\mathcal{F}_{N\backslash M}}(N)}H$. Procediendo de forma análoga con todas las componentes maximales de N, es inmediato que

$$\gamma_i\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)=0,\ \text{para todo}\ i\in N.$$

(b) Si se considera el razonamiento inicial del apartado (a), $\left(N,v-v^{\mathcal{F}},\mathcal{F}\right)$ es anónima para los jugadores al ser $\left(v-v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}}(S)=0$, para toda $S\subseteq N$. En efecto, sea $f : \{0, 1, \ldots, |D|\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0$, con $k = 0, 1, \ldots, |D|$. Entonces,

$$\left(v - v^{\mathcal{F}}\right)^{\mathcal{F}}(S) = f\left(|S \cap D|\right) = 0, \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Por tanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i\left(N, v - v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right) = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in D, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $i \in N$. Si se considera cualquier $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$ tal que $|M| > 1$ y se aplica el hecho de que γ es una regla de asignación y, por tanto, es eficiente en las $\mathcal{F}$-componentes de N, resulta

$$\sum_{i \in M} \gamma_i\left(N, v - v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right) = \alpha\ |M| = \left(v - v^{\mathcal{F}}\right)(M) = 0,$$

lo que implica que $\alpha = 0$. Así, $\gamma_i\left(N, v - v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right) = 0$, para todo $i \in N$. □

Teorema 4.36 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la única regla de asignación que satisface las propiedades de aditividad, jugador superfluo y anónima para los jugadores.*

Demostración: De los resultados anteriores se desprende que el valor de Myerson cumple las propiedades indicadas. Por tanto, sólo falta probar la unicidad. Para ello, supóngase que γ es una regla de asignación en SE^N que satisface las propiedades de aditividad, jugador superfluo y anónima para los jugadores. Habrá que demostrar que, para cualquier terna $(N, v, \mathcal{F})$, se verifica

$$\gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \mu\left(N, v, \mathcal{F}\right).$$

En principio, por el Lema 4.35

$$\mu\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \mu\left(N, v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right), \ \ \gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right),$$

y, teniendo en cuenta que $\{u_S : S \in \mathcal{F},\, S \neq \emptyset\}$ constituye una base para los $\mathcal{F}$-juegos restringidos [9],

$$v^{\mathcal{F}} = \sum_{\{S \in \mathcal{F} : S \neq \emptyset\}} \alpha_S u_S.$$

Aplicando la adititividad se tiene,

$$\begin{aligned} \mu(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \in \mathcal{F} : S \neq \emptyset\}} \mu(N, \alpha_S u_S, \mathcal{F}), \\ \gamma(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{\{S \in \mathcal{F} : S \neq \emptyset\}} \gamma(N, \alpha_S u_S, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente probar que, para todo $S \in \mathcal{F}$, $S \neq \emptyset$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\gamma(N, \alpha u_S, \mathcal{F}) = \mu(N, \alpha u_S, \mathcal{F}).$$

Si $i \in N \backslash S$, entonces, para toda coalición $T \subseteq N$, se tiene que

$$\alpha u_S(T) = \alpha \iff S \subseteq T \iff S \subseteq T \backslash \{i\} \iff \alpha u_S(T \backslash \{i\}) = \alpha,$$

con lo que cualquier jugador que no pertenezca a S es superfluo, y así

$$\begin{aligned} \mu(N, \alpha u_S, \mathcal{F}) &= \mu\left(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_{N \backslash (N \backslash S)}\right) = \mu(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S), \\ \gamma(N, \alpha u_S, \mathcal{F}) &= \gamma\left(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_{N \backslash (N \backslash S)}\right) = \gamma(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S). \end{aligned}$$

Se probará, entonces que

$$\gamma(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \mu(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S), \text{ para } S \in \mathcal{F},\, S \neq \emptyset.$$

Para ello, se distinguen dos casos: $|S| = 1$ y $|S| > 1$.

Si $|S| = 1$, entonces $S = \{i\}$, $\mathcal{F}_S = \{\{i\}\}$ y $C_{\mathcal{F}_S}(N) = \{\{i\}\}$. Al ser μ y γ reglas de asignación resulta que, para todo $j \in N$ con $j \neq i$, se tiene que $j \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}_S}(N)} M$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_j(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) &= \gamma_j(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = 0, \\ \mu_i(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) &= \gamma_i(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \alpha u_S(\{i\}) = \alpha. \end{aligned}$$

Considérese, ahora, $S \in \mathcal{F}$, con $|S| > 1$. En primer lugar, para todo $T \subseteq N$ se tiene que

$$(\alpha u_S)^{\mathcal{F}_S}(T) = \sum_{R \in C_{\mathcal{F}_S}(T)} \alpha u_S(R) = \alpha \Longleftrightarrow \exists R \in \mathcal{F}_S \text{ tal que } S \subseteq R \subseteq T.$$

Ahora bien, $R \in \mathcal{F}_S$ implica que $R \subseteq S$. Luego $R = S$ y

$$(\alpha u_S)^{\mathcal{F}_S}(T) = \alpha \Longleftrightarrow S \subseteq T.$$

Por tanto, $(\alpha u_S)^{\mathcal{F}_S} = \alpha u_S$. Por otro lado, $S \in \mathcal{F}_S$ lo cual implica que $D = \{i \in N : |\mathcal{C}_{S_i}| > 0\} = S$ y la terna $(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S)$ es anónima para los jugadores ya que

$$(\alpha u_S)^{\mathcal{F}_S}(T) = \alpha u_S(T) = \alpha \Longleftrightarrow S \subseteq T \Longleftrightarrow S \cap T = S,$$

de donde se deduce que existe una función $f : \{0, 1, \ldots, |S|\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(\alpha u_S)^{\mathcal{F}_S}(T) = f(|S \cap T|)\text{, para todo } T \subseteq N,$$

siendo $f(0) = \cdots = f(|S| - 1) = 0$, $f(|S|) = \alpha$. De aquí, la existencia de $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma_i(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \begin{cases} \beta & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $i \in N$ y, para el valor de Myerson generalizado

$$\mu_i(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $i \in N$. Aplicando que $C_{\mathcal{F}_S}(N) = \{S\}$ y que μ, γ son reglas de asignación y, por tanto, eficientes para las $\mathcal{F}_S$-componentes de N se tiene

$$\sum_{i \in S} \gamma_i(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \alpha = |S|\,\beta,$$

y $\beta = \dfrac{\alpha}{|S|}$. Ello implica que $\gamma(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S) = \mu(N, \alpha u_S, \mathcal{F}_S)$, para todo $S \in \mathcal{F}$, $S \neq \emptyset$. $\square$

La propiedad de regla de asignación anónima para los jugadores fue introducida debido a que el valor de Myerson generalizado no satisfacía la propiedad de influencia. Sin embargo, en el Teorema 4.31 se estableció que las propiedades de aditividad, del soporte superfluo y anónima para los jugadores sólo caracterizaban, de forma única, al valor de Myerson generalizado dentro de una clase específica de estructuras de cooperación $\cup$-estables. La sustitución de la propiedad del soporte superfluo por la del jugador superfluo permitía demostrar, en el Teorema 4.36, que las propiedades de aditividad, jugador superfluo y anónima para los jugadores sí caracterizan de forma única al valor de Myerson generalizado en el conjunto de las estructuras de cooperación $\cup$-estables.

El propósito de la última parte de esta sección es introducir una variación en la propiedad del soporte superfluo para obtener con ella otra caracterización axiomática.

Definición 4.37 *Una regla de asignación $\gamma : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad fuerte del soporte superfluo si, para toda terna $(N, v, \mathcal{F}) \in SE^N$ y, para todo soporte no unitario H tal que*

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S)\,, \quad \textit{para toda } S \subseteq N,$$

se verifica

$$\gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v, \overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}\right).$$

Como consecuencia directa de la demostración del Teorema 4.26, nótese que si H es un soporte no unitario superfluo, entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S)$ y, por tanto, si una regla de asignación γ satisface la propiedad fuerte del soporte superfluo, se verifica, para H, que $\gamma\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v, \overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}\right)$. Ahora bien, si un soporte no unitario H verifica que $v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\overline{\mathcal{B}\setminus\{H\}}}(S)$, para toda $S \subseteq N$, éste no es siempre un soporte superfluo.

Teorema 4.38 *El valor de Myerson generalizado $\mu : SE^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la única regla de asignación que satisface las propiedades de aditividad, fuerte del soporte superfluo y anónima para los jugadores.*

Demostración: Es inmediato, aplicando la definición, que el valor de Myerson verifica la propiedad fuerte del soporte superfluo. Por tanto, sólo queda probar la unicidad. Para ello, se probará que cualquier regla de asignación γ en SE^N que satisfaga la propiedad fuerte del soporte superfluo, verifica también la propiedad del jugador superfluo. Así, se estará bajo las condiciones del teorema anterior y, de ahí, se deducirá su unicidad.

Sea $i \in N$ un jugador superfluo para $(N, v, \mathcal{F})$; es decir,

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S \setminus \{i\}), \text{ para todo } S \subseteq N.$$

Se ha de probar que

$$\gamma\,(N, v, \mathcal{F}) = \gamma\left(N, v, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right).$$

Ahora bien, $\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}} = \overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i}$ donde $\mathcal{B}_i = \{B \in \mathcal{B} : i \in B\}$. En efecto, si $F \in \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$, entonces $F \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $F = \bigcup_{k\in K} B_k$, con $B_k \in \mathcal{B}$.

Además, $B_k \notin \mathcal{B}_i$, para todo $k \in K$ ya que si ello fuera cierto para algún k, entonces $i \in B_k$ y, de ahí $i \in F$ lo cual es absurdo. Por otra parte, si $F \in \overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i}$ entonces $F \in \mathcal{F}$ y $i \notin F$, con lo cual $F \in \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}$.

Puesto que γ es una regla de asignación anónima para los jugadores resulta que, aplicando el Lema 4.35, se tiene

$$\gamma\,(N, v, \mathcal{F}) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right).$$

Por la Proposición 3.18 se tiene que $C_{\mathcal{F}}\,(S\setminus\{i\}) = C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}\,(S)$, para todo $S \subseteq N$. De ahí, ya que $i \in N$ es un jugador superfluo, para todo $S \subseteq N$

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\}) = \sum_{T\in C_{\mathcal{F}}(S\setminus\{i\})} v(T) = \sum_{T\in C_{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S)} v(T) = v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S).$$

Entonces,

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}, \mathcal{F}\right).$$

Como $\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}} = \overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i}$ y $v^{\mathcal{F}} = v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}$, ello significa que cualquier soporte $B \in \mathcal{B}_i$ no tiene influencia en el juego restringido, ya que para todo $S \subseteq N$, se verifica

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}(S) = v^{\overline{\overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i}\setminus\{B\}}}(S),$$

al ser $\overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i} = \overline{\overline{\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i}\setminus\{B\}}$.

Por tanto, aplicando reiteradamente la propiedad fuerte del soporte superfluo, para todo $B \in \mathcal{B}_i$, se tiene

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}, \mathcal{F}\right) = \gamma\left(N, v^{\mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}}, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right) = \gamma\left(N, v, \mathcal{F}_{N\setminus\{i\}}\right).$$

Lo anterior demuestra que γ es una regla de asignación que verifica la propiedad del jugador superfluo y, por tanto

$$\gamma(N, v, \mathcal{F}) = \mu(N, v, \mathcal{F}), \text{ para todo } (N, v, \mathcal{F}) \in SE^N.$$

□

4.5 Cálculo del valor de posición generalizado

Al igual que ocurría para el valor de Myerson generalizado, uno de los principales inconvenientes del valor de posición generalizado radica en su cómputo efectivo. De ahí, que se busquen algunos procedimientos que simplifiquen, en lo posible, su cálculo.

Siguiendo una línea de trabajo análoga a la del capítulo anterior, en esta sección se indican dos posibles direcciones en el cálculo del valor de posición. En primer lugar, y puesto que los dividendos son decisivos en la determinación del valor de Shapley, se estudian éstos y algunas de las condiciones que dan lugar a expresiones sencillas de cómputo. Ello implica hacer un cálculo de los dividendos del juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$. Por otro lado, y teniendo en cuenta que es posible que la coalición N no sea una coalición factible, se demuestra que puede realizarse el cálculo del valor de posición generalizado mediante una restricción a la coalición factible maximal de N a la que pertenezca cada jugador.

4.5.1 Cálculo mediante los dividendos

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en la última sección del capítulo anterior, es importante determinar, si es posible, el valor de los dividendos del juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ en función de los dividendos del juego (N, v) ya que

$$\pi_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \left[\sum_{\{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} : C \in \mathcal{A}\}} \frac{\triangle_{v^{\mathcal{C}}} (\mathcal{A})}{|\mathcal{A}|} \right],$$

y los dividendos del juego de conferencias vienen dados por

$$\triangle_{v^{\mathcal{C}}} (\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{A}| - |\mathcal{T}|} v^{\mathcal{C}} (\mathcal{T}) .$$

De ahí, que se trate de encontrar una relación de los dividendos del juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ en función de los del juego (N, v).

Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Considérese el correspondiente juego de conferencias asociado. Entonces, se puede escribir,

$$v^{\mathcal{C}} = \sum_{\{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C} : \mathcal{H} \neq \emptyset\}} \triangle_{v^{\mathcal{C}}} (\mathcal{H}) \, u_{\mathcal{H}},$$

donde $(\mathcal{C}, u_{\mathcal{H}})$ es el juego de unanimidad definido por

$$u_{\mathcal{H}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u_{\mathcal{H}} (\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obviamente, para cualquier colección de soportes $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$,

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}} \triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{H})\, u_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{H}).$$

Además, teniendo en cuenta que $(\mathcal{C}, \subseteq)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado, en el que se pueden considerar las funciones,

$$\triangle_{v^{\mathcal{C}}}, v^{\mathcal{C}} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad \triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\emptyset) = 0,$$

resulta que, aplicando la fórmula de inversión de Möbius

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A})\, v^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}).$$

En el siguiente resultado se pone de manifiesto que —en determinadas estructuras de cooperación estables para la unión— los dividendos del juego $v^{\mathcal{C}}$ pueden expresarse en función de los dividendos del juego v. Para ello, en lo que sigue, si $S \in \mathcal{F}$, se denotará por $\mathcal{S}$ al conjunto constituido por todos aquellos soportes no unitarios cuya unión da lugar a la coalición factible S y si $S \notin \mathcal{F}$, denotaremos por $\overline{\mathcal{S}}$ al conjunto de todos los soportes no unitarios correspondientes a $\overline{S}$.

Teorema 4.39 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$. Entonces*

$$\triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}) = \sum_{S \in V(\mathcal{A})} \triangle_v(S), \ \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C},\ \mathcal{A} \neq \emptyset,$$

siendo $V(\mathcal{A}) = \left\{ S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : \overline{S} \neq \emptyset,\ \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \right\}.$

Demostración: Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Según el razonamiento anterior

$$\triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A})\, v^{\mathcal{C}}(\mathcal{H}),$$

y, por definición del juego $v^{\mathcal{C}}$, se puede escribir

$$\triangle_{v^{\mathcal{C}}}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A}) \sum_{H \in C_{\overline{\mathcal{H}}}(N)} v(H).$$

Por otro lado, se tiene que

$$v(H) = \sum_{S \subseteq H} \triangle_v(S)$$

y, por tanto,

$$\triangle_{v^c}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A}) \sum_{H \in C_{\overline{\mathcal{H}}}(N)} \left[\sum_{S \subseteq H} \triangle_v(S) \right].$$

Sacando factor común a los diferentes $\triangle_v(S)$, el valor de $\triangle_{v^c}(\mathcal{A})$ puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\mu(\mathcal{H}_1, \mathcal{A}) \left[\sum_{S \subseteq H_{11}} \triangle_v(S) + \cdots + \sum_{S \subseteq H_{1k}} \triangle_v(S) \right] + \cdots + \\
&\mu(\mathcal{H}_l, \mathcal{A}) \left[\sum_{S \subseteq H_{l1}} \triangle_v(S) + \cdots + \sum_{S \subseteq H_{lt}} \triangle_v(S) \right] + \cdots + \\
&\mu(\mathcal{H}_p, \mathcal{A}) \left[\sum_{S \subseteq H_{p1}} \triangle_v(S) + \cdots + \sum_{S \subseteq H_{pm}} \triangle_v(S) \right],
\end{aligned}$$

donde se denota por $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_p$ a los elementos del conjunto $\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}\}$ y, para $i = 1, \ldots, p$, se representa por $\{H_{ij}\}_{j \in J}$ las componentes maximales de N en $\overline{\mathcal{H}_i}$.

Se pueden observar las siguientes características:

1. Para cada $\mathcal{H}_i \in \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}\}$, con $1 \leq i \leq p$, las coaliciones factibles maximales de N en $\overline{\mathcal{H}_i}$, son disjuntas entre sí. Por tanto $\triangle_v(S)$ aparece, a lo sumo, una sóla vez para cada $\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{A}$.

2. Aparecerán sólo las coaliciones $S \subseteq N$ que estén contenidas en alguna componente maximal de N de algún o algunos $\overline{\mathcal{H}}$, con $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$. Es decir, que estén contenidas en alguna coalición factible y, por tanto, $\overline{S} \neq \emptyset$.

3. Si $S \subseteq H_{ij}$, con $H_{ij} \in C_{\overline{\mathcal{H}_i}}(N)$ para algún $\mathcal{H}_i$, entonces $S \subseteq \overline{S} \subseteq H_{ij}$ y, debido a la unicidad en la expresión de cada coalición factible como unión de soportes no unitarios, se tiene que

$$\overline{S} \subseteq H_{ij} \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H}_i.$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores,

$$\triangle_{v^c}(\mathcal{A}) = \sum_{\left\{S \subseteq N:\, \overline{S} \neq \emptyset\right\}} \left[\sum_{\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A})\right] \triangle_v(S).$$

Ahora bien:

1. Si $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{A}$, se tiene que

$$\sum_{\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = 1.$$

2. Si $\overline{\mathcal{S}} \neq \mathcal{A}$, el conjunto $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ es el intervalo $\left[\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{A}\right]$ que es un retículo finito con, al menos, dos elementos y, por tanto [74, Corolario 3.9.3],

$$\sum_{\left\{\mathcal{H}:\, \mathcal{H} \wedge \overline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}}\right\}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = \sum_{\left\{\mathcal{H}:\, \overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}\right\}} \mu(\mathcal{H}, \mathcal{A}) = 0.$$

Entonces, finalmente, queda

$$\triangle_{v^c}(\mathcal{A}) = \sum_{\left\{S \subseteq N:\, \overline{S} \neq \emptyset,\, \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{A}\right\}} \triangle_v(S), \text{ con } \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

□

4.5.2 Cálculo mediante las $\mathcal{F}$-componentes

A continuación se calcula el valor de posición generalizado a través de las $\mathcal{F}$-componentes siguiendo la misma línea que en el valor de Myerson generalizado. Este resultado, fue estudiado por van den Nouweland (1993) [59] para el valor de posición en situaciones de comunicación.

Teorema 4.40 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Sean $i \in N$ y $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$ tal que $i \in M$. Entonces*

$$\pi_i (N, v, \mathcal{F}) = \pi_i (M, v\,|_M\,, \mathcal{F}_M),$$

donde $v\,|_M$ es la restricción de v a M.

Demostración: Por definición, se tiene

$$\pi_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} \Phi_C \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right).$$

Si $i \in M$, con $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$, la Proposición 3.11 asegura que existe una partición $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p\}$ de $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \ldots, p$, es precisamente la colección de soportes no unitarios contenidos en la componente maximal M y de forma que M es la unión de ellos. Entonces, $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{D}_k$, para un único k, y resulta que

$$\pi_i (N, v, \mathcal{F}) = \sum_{\{D \in \mathcal{D}_k :\, i \in D\}} \frac{1}{|D|} \Phi_D \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right).$$

Se prueba, a continuación, que $\Phi_D \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \Phi_D \left(\mathcal{D}_k, v^{\mathcal{D}_k}\right)$ para cualquier $D \in \mathcal{D}_k$. En efecto, por definición de valor de Shapley

$$\Phi_D \left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} : D \notin \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C}} (\mathcal{S} \cup \{D\}) - v^{\mathcal{C}} (\mathcal{S})\right]$$

y, para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$, $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) = v^{\overline{\mathcal{S}}}(N) = \sum_{H \in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)} v(H)$. Teniendo en cuenta el apartado (c) de la Proposición 3.13, se tiene

$$\begin{aligned} C_{\overline{\mathcal{S}}}(N) &= C_{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{C}}}(N) = C_{\overline{\mathcal{S}\cap(\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\ldots\cup\mathcal{D}_p)}}(N) \\ &= C_{\overline{(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_1)\cup(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_2)\cup\ldots\cup(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_p)}}(N) \\ &= C_{\overline{(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_1)}}(N) \cup C_{\overline{(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_2)}}(N) \cup \ldots \cup C_{\overline{(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_p)}}(N), \end{aligned}$$

y aplicándolo a $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$ y $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup\{D\})$, el valor de $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S})$, resulta ser

$$\begin{aligned} & \sum_{H\in C_{\overline{\mathcal{S}\cup\{D\}}}(N)} v(H) - \sum_{H\in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)} v(H) \\ = & \sum_{H\in C_{\overline{(\mathcal{S}\cup\{D\})\cap\mathcal{D}_k}}(N)} v(H) + \sum_{\left\{H:H\in C_{\overline{(\mathcal{S}\cup\{D\})\cap\mathcal{D}_t}}(N),\, t\neq k\right\}} v(H) \\ - & \sum_{H\in C_{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k}}(N)} v(H) - \sum_{\left\{H:H\in C_{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_t}}(N),\, t\neq k\right\}} v(H) \\ = & \sum_{H\in C_{\overline{(\mathcal{S}\cup\{D\})\cap\mathcal{D}_k}}(N)} v(H) - \sum_{H\in C_{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k}}(N)} v(H) \\ = & \; v^{\overline{(\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k)\cup\{D\}}}(N) - v^{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k}}(N), \end{aligned}$$

debido a que, si $t \neq k$,

$$C_{\overline{(\mathcal{S}\cup\{D\})\cap\mathcal{D}_t}}(N) = C_{\overline{\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_t}}(N),$$

pues $\mathcal{D}_t \cap \{D\} = \emptyset$ y $(\mathcal{S}\cup\{D\})\cap\mathcal{D}_k = (\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k)\cup\{D\}$.

Ahora bien, si $\mathcal{S}$ recorre todas las coaliciones de soportes de $\mathcal{C}$ a las que el soporte no unitario D no pertenece, $\mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k$ recorre todas las coaliciones de soportes no unitarios contenidos en $\mathcal{D}_k$ que no contienen al soporte D. De ahí, $\Phi_D\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es igual a

$$\sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C}:D\notin\mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S})\right]$$

$$= \sum_{\{\mathcal{T}\subseteq\mathcal{D}_k : D\notin\mathcal{T}\}} \left[\sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C} : D\notin\mathcal{S},\, \mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k=\mathcal{T}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right) \right] \left[v^{\overline{\mathcal{T}\cup\{D\}}}(N) - v^{\overline{\mathcal{T}}}(N) \right]$$

$$= \sum_{\{\mathcal{T}\subseteq\mathcal{D}_k : D\notin\mathcal{T}\}} \left[\sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C} : D\notin\mathcal{S},\, \mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k=\mathcal{T}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right) \right] \left[v^{\mathcal{D}_k}(\mathcal{T}\cup\{D\}) - v^{\mathcal{D}_k}(\mathcal{T}) \right].$$

Utilizando un razonamiento completamente similar al del teorema correspondiente al valor de Myerson generalizado, se obtiene

$$\sum_{\{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{C} : D\notin\mathcal{S},\, \mathcal{S}\cap\mathcal{D}_k=\mathcal{T}\}} \gamma\left(\mathcal{S}\right) = \gamma\left(\mathcal{T}\right),$$

y, de aquí

$$\Phi_D\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \Phi_D\left(\mathcal{D}_k, v^{\mathcal{D}_k}\right) \text{ para todo } D\in\mathcal{D}_k.$$

Por lo tanto,

$$\pi_i\left(N, v, \mathcal{F}\right) = \pi_i\left(M, v\left|_M\right., \mathcal{F}_M\right).$$

□

Capítulo 5

Transmisión de propiedades

Las propiedades de la función característica de un juego cooperativo de utilidad transferible son, a veces, determinantes para que los diferentes conceptos de solución del juego posean algunas características especiales, así como para que existan algunas relaciones entre ellos. Por ejemplo, si la función característica del juego es cero-normalizada y superaditiva, entonces el valor de Shapley y el core del juego están constituidos por vectores cuyas componentes son no negativas, y si la función característica es supermodular, el valor de Shapley pertenece al core del juego (N, v).

De ahí, tiene importancia estudiar si, al condicionarse la cooperación, las propiedades del juego (N, v) se transfieren a la correspondiente función característica del juego restringido. En esta memoria interesa analizar, en el contexto de estructuras de cooperación estables para la unión, la transmisión de propiedades del juego (N, v) al $\mathcal{F}$-juego restringido y al juego de conferencias, así como las relaciones existentes entre las propiedades de los juegos $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$.

Lógicamente, al ser las propiedades de la función v fundamentales para establecer resultados, algunas cuestiones referentes a la transmisión de propiedades entre el juego (N, v) y $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ han ido surgiendo a lo largo de los capítulos anteriores. Por tanto, en este último capítulo, se expondrán aquéllas que aún no han sido tratadas como las relaciones entre las propiedades de las funciones correspondientes al $\mathcal{F}$-juego restringido y al juego de conferencias y, en especial, la transmisión de la convexidad del juego (N, v) al juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$.

A lo largo de todo el capítulo se supondrá que el juego (N, v) es cero-normalizado.

5.1 Relación entre $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$

De igual forma que existe una conexión entre el juego arco y el juego restringido por un grafo de comunicación, aquí puede establecerse una relación entre el juego restringido por la cooperación parcial, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ y el juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$. Ello se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Teorema 5.1 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión y $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ el juego de conferencias. Entonces, para cada $S \subseteq N$, se verifica que*

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_S),$$

donde $\mathcal{C}_S = \{C \in \mathcal{C} : C \subseteq S\}$.

Demostración: Sea $S \subseteq N$. Si $C_{\mathcal{F}}(S) = \emptyset$, es inmediato que $\mathcal{C}_S = \emptyset$ ya que, de lo contrario, existiría $C \in \mathcal{C}_S$ y, de ahí, $C \in \mathcal{F}$, $C \subseteq S$ y $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$. Entonces $v^{\mathcal{F}}(S) = 0 = v^{\mathcal{C}}(\emptyset) = 0$.

Supóngase, por tanto, que $C_{\mathcal{F}}(S) \neq \emptyset$; en este caso

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T).$$

Sea $\mathcal{F}_S = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq S\}$. Por la Proposición 3.16, $(N, \mathcal{F}_S)$ es un sistema $\cup$-estable en el que se verifica que

$$C_{\mathcal{F}_S}(N) = C_{\mathcal{F}}(S),$$

y tiene sentido considerar su base $\mathcal{B}_S$. Considérese $\mathcal{C}_S$, siendo $\mathcal{C}_S$ el conjunto formado por los soportes de $\mathcal{B}_S$ que tengan un cardinal mayor o igual que dos. Por el apartado (c) de la Proposición 3.16, $\mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{B}$ y, entonces, $\mathcal{C}_S \subseteq \mathcal{C}$. Por tanto, para cualquier coalición $S \subseteq N$, se verifica que

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) = v^{\overline{\mathcal{B}_S}}(N) = \sum_{M \in C_{\overline{\mathcal{B}_S}}(N)} v(M) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T) = v^{\mathcal{F}}(S),$$

ya que $C_{\mathcal{F}_S}(N) = C_{\mathcal{F}}(S)$ y el juego (N, v) es cero-normalizado. □

5.2 Equilibrio

En el capítulo segundo se estableció que, bajo las hipótesis de ser (N, v) cero-normalizado y $v^{\mathcal{F}}(N) = v\left(N\right)$, el core del juego (N, v) estaba incluido en el core del $\mathcal{F}$-juego restringido y, en consecuencia, el carácter equilibrado del juego (N, v) era transferido al juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$.

Ahora, se procede a estudiar la transmisión o no del carácter equilibrado del juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ al juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ y viceversa.

Teorema 5.2 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Si $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es equilibrado y no negativo, entonces $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado.*

Demostración: Como $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es no negativo y equilibrado, entonces

$$C\left(v^{\mathcal{C}}\right) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{C}|} : \sum_{C \in \mathcal{C}} y_C = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}\right), \ \sum_{A \in \mathcal{A}} y_A \geq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{A}\right), \ \forall \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \right\} \neq \emptyset.$$

Sea entonces $y \in C\left(v^{\mathcal{C}}\right)$. A partir del vector y, se construye otro vector $x \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$x_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} y_C & \text{si } \mathcal{C}_i \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $i \in N$. Este vector así construido pertenece a $C\left(v^{\mathcal{F}}\right)$; es decir,

$$\sum_{i \in N} x_i = v^{\mathcal{F}}(N), \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v^{\mathcal{F}}(S), \quad \forall S \subset N.$$

En efecto, en primer lugar,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} x_i &= \sum_{i \in N} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} y_C\right] \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \left[\sum_{i \in C} \frac{1}{|C|}\right] y_C \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \left[|C| \frac{1}{|C|}\right] y_C \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} y_C = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}\right) \\ &= v^{\mathcal{F}}(N). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} y_C\right].$$

Por el Teorema 5.1, para cada $S \subset N$, $v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) = v^{\mathcal{F}}(S)$ y, como $y_C \geq 0$ y $\{C \in \mathcal{C}_S : i \in C\} \subseteq \mathcal{C}_i$, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &= \sum_{i \in S} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_i} \frac{1}{|C|} y_C\right] \\ &\geq \sum_{i \in S} \left[\sum_{\{C \in \mathcal{C}_S : i \in C\}} \frac{1}{|C|} y_C\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{C\in\mathcal{C}_S}\left[\frac{1}{|C|}|C|\right]y_C = \sum_{C\in\mathcal{C}_S} y_C \\ &\geq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) \\ &= v^{\mathcal{F}}(S), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue por ser $y \in C\left(v^{\mathcal{C}}\right)$. Por tanto, $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es equilibrado. $\square$

En el ejemplo que se desarrolla a continuación, se pone de manifiesto que el recíproco no es cierto.

Ejemplo 5.3 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación $\cup$-estable, donde $N = \{1,2,3\}$, el sistema de coaliciones factibles es*

$$\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\},$$

y el juego viene determinado por

$$v(S) = \begin{cases} |S| & si\ |S| \geq 2, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

El juego (N, v) es totalmente equilibrado y el Teorema 2.31 asegura que el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ lo es. Sin embargo, el juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ correspondiente no es equilibrado, ya que $\mathcal{C} = \mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ y, de ahí,

$$C\left(v^{\mathcal{C}}\right) = \left\{y \in \mathbb{R}^{|\mathcal{C}|} : y_{\{1,2\}} + y_{\{1,3\}} = 3,\quad y_{\{1,2\}} \geq 2,\quad y_{\{1,3\}} \geq 2\right\} = \emptyset.$$

5.3 Superaditividad

En el Teorema 2.14 se demostró que, para cualquier estructura de cooperación estable para la unión $(N, v, \mathcal{F})$, si (N, v) era cero-normalizado y superaditivo, también lo era el $\mathcal{F}$-juego restringido. Ahora, al estudiar la transferencia de la superaditividad entre los juegos $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ y $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, se produce una situación completamente análoga a la de la sección anterior ya que sí se transmite el carácter superaditivo del juego de conferencias al $\mathcal{F}$-juego restringido, aunque lo contrario no siempre es cierto.

Teorema 5.4 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Si $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es superaditivo y no negativo, entonces $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es superaditivo.*

Demostración: Sean $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$. Se ha de probar que

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup T) \geq v^{\mathcal{F}}(S) + v^{\mathcal{F}}(T).$$

Teniendo en cuenta el Teorema 5.1, se tiene que

$$v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right), \quad v^{\mathcal{F}}(T) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_T\right), \quad v^{\mathcal{F}}(S \cup T) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S \cup T}\right),$$

así, la desigualdad a demostrar es equivalente a

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S \cup T}\right) \geq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) + v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_T\right).$$

Para ello, es suficiente probar que $\mathcal{C}_S \cap \mathcal{C}_T = \emptyset$ y que $\mathcal{C}_S \cup \mathcal{C}_T \subseteq \mathcal{C}_{S \cup T}$ ya que, por la superaditividad y monotonía del juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, se tendría

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right) + v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_T\right) \leq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S \cup \mathcal{C}_T\right) \leq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S \cup T}\right).$$

En primer lugar,

$$\mathcal{C}_S \subseteq 2^S, \quad \mathcal{C}_T \subseteq 2^T, \quad S \cap T = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{C}_S \cap \mathcal{C}_T = \emptyset.$$

La inclusión $\mathcal{C}_S \cup \mathcal{C}_T \subseteq \mathcal{C}_{S \cup T}$ se verifica por la propia construcción de $\mathcal{C}_S$, $\mathcal{C}_T$ y $\mathcal{C}_{S \cup T}$. En efecto, el Teorema 5.1 permite afirmar que $\mathcal{C}_S$, $\mathcal{C}_T$ y $\mathcal{C}_{S \cup T}$ son los conjuntos formados por los soportes no unitarios correspondientes a los sistemas $\cup$-estables $\left(N, \mathcal{F}_S\right), \left(N, \mathcal{F}_T\right)$ y $\left(N, \mathcal{F}_{S \cup T}\right)$. Entonces, $\mathcal{C}_S \cup \mathcal{C}_T \subseteq \mathcal{C}_{S \cup T}$ ya que cualquier soporte no unitario contenido en S o T es una coalición factible en $S \cup T$ y si no fuera un soporte en $S \cup T$ no lo sería tampoco en S ni en T. $\square$

En el ejemplo que se indica a continuación se establece que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

Ejemplo 5.5 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F})$ considerada en el Ejemplo 5.3. Es inmediato que el juego (N, v) es superaditivo y, por el Teorema 2.14, también lo es el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. Sin embargo el juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ no es superaditivo, puesto que*

$$v^{\mathcal{C}}(\{\{1,2\},\{1,3\}\}) \ngeq v^{\mathcal{C}}(\{\{1,2\}\}) + v^{\mathcal{C}}(\{\{1,3\}\}),$$

al ser

$$v^{\mathcal{C}}(\{\{1,2\},\{1,3\}\}) = v(\{1,2,3\}) = 3,$$
$$v^{\mathcal{C}}(\{\{1,2\}\}) = v(\{1,2\}) = 2, \quad v^{\mathcal{C}}(\{\{1,3\}\}) = v(\{1,3\}) = 2.$$

5.4 Convexidad

En el capítulo segundo se estudió la transmisión de la convexidad del juego (N, v) al juego restringido $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$. Por ello, en esta sección, se estudiará la transferencia de la convexidad entre el juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ y $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ así como del juego (N, v) al juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$.

Lógicamente, si el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ hereda la convexidad del juego (N, v) siempre que la familia $(N, \mathcal{F})$ sea intersectante, es previsible que la transmisión de la convexidad del juego (N, v) al juego de conferencias sea sólo posible dentro de estructuras de cooperación $\cup$-estables que tengan unas características especiales. Ello se formula en la segunda parte de la sección y permitirá asegurar bajo qué condiciones el valor de posición generalizado pertenece al core del juego restringido.

Teorema 5.6 *Sea $(N, v, \mathcal{F})$ una estructura de cooperación estable para la unión. Si el juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es no negativo y convexo, entonces $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ es convexo.*

Demostración: Sea $i \in N$ y S, T tales que $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$. Se ha de probar que

$$v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(S) \leq v^{\mathcal{F}}(T \cup \{i\}) - v^{\mathcal{F}}(T).$$

Por el Teorema 5.1, se verifica que

$$\begin{array}{ll} v^{\mathcal{F}}(S \cup \{i\}) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\right), & v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S}\right), \\ v^{\mathcal{F}}(T \cup \{i\}) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T\cup\{i\}}\right), & v^{\mathcal{F}}(T) = v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T}\right), \end{array}$$

por lo tanto, la desigualdad a demostrar es equivalente a probar que

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S}\right) \leq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T\cup\{i\}}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T}\right).$$

Por una parte, como $\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}$, $\mathcal{C}_{T\cup\{i\}}$, $\mathcal{C}_S$ y $\mathcal{C}_T$ son, respectivamente, los conjuntos constituidos por los soportes no unitarios de los sistemas $\cup$-estables $\left(N, \mathcal{F}_{S\cup\{i\}}\right), \left(N, \mathcal{F}_{T\cup\{i\}}\right), \left(N, \mathcal{F}_{S}\right)$ y $\left(N, \mathcal{F}_{T}\right)$, de ahí, se verifica que

$$\mathcal{C}_{S\cup\{i\}} \cup \mathcal{C}_T \subseteq \mathcal{C}_{T\cup\{i\}} \text{ y } \mathcal{C}_{S\cup\{i\}} \cap \mathcal{C}_T = \mathcal{C}_S.$$

Por otra parte, ya que $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es no negativo, la superaditividad de $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ implica que

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T\cup\{i\}}\right) \geq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}} \cup \mathcal{C}_T\right).$$

Además, por la convexidad del juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ se tiene

$$\begin{array}{rcl} v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}} \cup \mathcal{C}_T\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_T\right) & \geq & v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}} \cap \mathcal{C}_T\right) \\ & = & v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_S\right). \end{array}$$

Combinando las últimas expresiones, se deduce finalmente que

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\right)-v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S}\right)\leq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{S\cup\{i\}}\cup\mathcal{C}_{T}\right)-v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T}\right)\leq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T\cup\{i\}}\right)-v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}_{T}\right).$$

□

Shapley (1971) estableció que un juego (N,v) es convexo si y sólo si

$$v(T_1\cup T_2)-v(T_1)-v(T_2)\geq v(S_1\cup S_2)-v(S_1)-v(S_2),$$

siendo $T_1\cap T_2=\emptyset,\ S_1\subseteq T_1,\ S_2\subseteq T_2$. En el siguiente resultado se generalizará esta condición para k conjuntos. Para ello, se utiliza la siguiente equivalencia de juego convexo [24]: un juego (N,v) es convexo si y sólo si

$$v(T\cup R)-v(T)\geq v(S\cup R)-v(S),\ \forall S\subseteq T\subseteq N\setminus R,$$

Lema 5.7 *El juego (N,v) es convexo si y sólo si, para cualquier $k\in\mathbb{N}$, se verifica*

$$v\left(\bigcup_{i=1}^{k}T_i\right)-\sum_{i=1}^{k}v(T_i)\geq v\left(\bigcup_{i=1}^{k}S_i\right)-\sum_{i=1}^{k}v(S_i),$$

donde $T_i\cap T_j=\emptyset,\ i\neq j$ y $S_i\subseteq T_i$ para todo $i=1,\ldots,k$.

Demostración: Para cada i, sean S_i,T_i tales que $S_i\subseteq T_i$ y $T_i\cap T_j=\emptyset$, $i\neq j$. Se verifica que

$$v\left(T_1\cup T_2\cup T_3\cup\cdots\cup T_k\right)-v(T_1)\geq v\left(S_1\cup T_2\cup T_3\cup\cdots\cup T_k\right)-v(S_1),$$

pues $S_1\subseteq T_1\subseteq N\setminus\{T_2\cup\cdots\cup T_k\}$.

Análogamente,

$$v\left(S_1\cup T_2\cup T_3\cup\cdots\cup T_k\right)-v(T_2)\geq v\left(S_1\cup S_2\cup T_3\cup\cdots\cup T_k\right)-v(S_2),$$

pues $S_2\subseteq T_2\subseteq N\setminus\{S_1\cup T_3\cup\cdots\cup T_k\}$.

Razonando sucesivamente de la misma forma, se llega a

$$v\left(S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1} \cup T_k\right) - v(T_k) \geq v\left(S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1} \cup S_k\right) - v(S_k),$$

pues $S_k \subseteq T_k \subseteq N \setminus \{S_1 \cup \cdots \cup S_{k-1}\}$.

Sumando miembro a miembro en todas las desigualdades obtenidas y simplificando, queda finalmente,

$$v\left(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \cdots \cup T_k\right) - \sum_{i=1}^{k} v(T_i) \geq v\left(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_k\right) - \sum_{i=1}^{k} v(S_i).$$

Para probar el recíproco, es suficiente tomar $k = 2$. $\square$

Teorema 5.8 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$. Si (N, v) es convexo también lo es el juego $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$.*

Demostración: Se ha de probar que dado $C \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{C\}$, se verifica

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{T} \cup \{C\}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{T}\right) \geq v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S} \cup \{C\}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right),$$

lo que es equivalente, teniendo en cuenta la definición de juego de conferencias, a

$$\sum_{T \in C_{\overline{\mathcal{T} \cup \{C\}}}(N)} v(T) - \sum_{T \in C_{\overline{\mathcal{T}}}(N)} v(T) \geq \sum_{S \in C_{\overline{\mathcal{S} \cup \{C\}}}(N)} v(S) - \sum_{S \in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)} v(S).$$

Los elementos de $C_{\overline{\mathcal{T}}}(N)$ pueden clasificarse según tengan o no intersección no vacía con $C \in \mathcal{C}$. Así, $C_{\overline{\mathcal{T}}}(N)$ puede expresarse de la siguiente forma

$$C_{\overline{\mathcal{T}}}(N) = \{T_1, \ldots, T_k\} \cup \{T_{k+1}, \ldots, T_h\},$$

donde $T_i \cap C \neq \emptyset$, para $i = 1, \ldots, k$ y $T_i \cap C = \emptyset$ para $i = k+1, \ldots h$.

Ahora bien, para $i = 1, \ldots, k$, $|T_i \cap C| = 1$. En efecto, supóngase que $|T_i \cap C| \geq 2$; entonces $T_i \cap C \in \mathcal{F}$ porque $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$ y, además, $T_i \cap C \neq C$ ya que, en otro caso, resultaría que $C \subseteq T_i$ con lo que $C \in \mathcal{T}$ lo cual es imposible al ser $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C} \setminus \{C\}$; como $T_i \cap C \subseteq T_i \in \overline{\mathcal{T}}$ y $T_i \cap C \in \mathcal{F}$, se deduce que $T_i \cap C$ es un soporte o bien es una unión de soportes no unitarios de $\mathcal{T}$; de ahí,

$$C = C \cup (T_i \cap C) = C \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right), \text{ con } \{B_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{T},$$

y entonces C se podría expresar de dos maneras diferentes como unión de soportes contradiciendo el hecho de ser $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$. También se deduce que si $T_1 \cap C \neq \emptyset, \ldots, T_k \cap C \neq \emptyset$, entonces

$$T_1 \cup C \in \mathcal{F}, \ldots, \ T_k \cup C \in \mathcal{F},$$

de donde

$$T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C \in \mathcal{F}.$$

Además, cada $T_1, T_2, \ldots, T_k$ contiene un único elemento de C.

Por ello, las coaliciones factibles maximales de N en $\overline{\mathcal{T}}$ serían,

$$\{T_1, \ldots, T_k, T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots, T_h\},$$

y las de N en $\overline{\mathcal{T} \cup \{C\}}$ serían,

$$\{T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C, T_{k+1}, T_{k+2}, \ldots, T_h\}.$$

Por tanto,

$$\sum_{T \in C_{\overline{\mathcal{T} \cup \{C\}}}(N)} v(T) - \sum_{T \in S_i} v(T) = v(T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C) - \sum_{i=1}^{k} v(T_i).$$

Un razonamiento análogo permite afirmar que,

$$\sum_{S \in C_{\overline{\mathcal{S} \cup \{C\}}}(N)} v(S) - \sum_{S \in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)} v(S) = v(S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C) - \sum_{i=1}^{p} v(S_i),$$

donde $S_i \in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)$, $S_i \cap C \neq \emptyset$, para $i = 1, \ldots, p$ y cada S_i contiene un único elemento de C. En consecuencia, queda probar la siguiente desigualdad,

$$v(T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C) - \sum_{i=1}^{k} v(T_i) \geq v(S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C) - \sum_{i=1}^{p} v(S_i).$$

En primer lugar,

$$T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C = T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C',$$

siendo $C' \subseteq C$ y $C' = \{i \in C : i \notin T_1 \cup \cdots \cup T_k\}$. También,

$$S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C'',$$

siendo $C'' \subseteq C$ y $C'' = \{i \in C : i \notin S_1 \cup \cdots \cup S_p\}$.

Por otro lado, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ implica que $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$ y si S_i es una coalición factible maximal de N en $\overline{\mathcal{S}}$, con $1 \leq i \leq p$, entonces $S_i \subseteq T_l$ para una única coalición $T_l \in C_{\overline{\mathcal{T}}}(N)$, con $1 \leq l \leq k$. Además, en este caso, la relación es uno a uno porque de lo contrario, $S_i, S_j \subseteq T_l$, habría dos elementos de C que están en T_l lo cual es imposible según se razonó anteriormente.

Obviamente $S_i \subseteq T_l$ y contienen al mismo elemento de C. Así, se podría escribir, sin pérdida de generalidad, que

$$S_1 \subseteq T_1, \ldots, S_p \subseteq T_p.$$

Es inmediato que $C' \subseteq C'' \subseteq C$. Por tanto,

$$C'' = C' \cup (C'' \setminus C') \subseteq C,$$

y para cada elemento $j \in (C'' \setminus C')$ existe T_j tal que $j \in T_j$, con $p+1 \leq j \leq k$.

Aplicando ahora el Lema 5.7, se tiene que,

$$\begin{aligned} & v\left(T_1 \cup \cdots \cup T_p \cup T_{p+1} \cup \cdots \cup T_k \cup C'\right) - v(T_1) - \cdots - v(T_k) - v\left(C'\right) \\ \geq\; & v\left(S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup (C'' \setminus C') \cup C'\right) - v(S_1) - \cdots - v(S_p) - \\ & v\left(\{p+1\}\right) - \cdots - v\left(\{k\}\right) - v\left(C'\right). \end{aligned}$$

Simplificando la expresión y teniendo en cuenta el carácter cero-normalizado del juego, resulta

$$\begin{aligned} & v\left(T_1 \cup \cdots \cup T_p \cup T_{p+1} \cup \cdots \cup T_k \cup C'\right) - \sum_{i=1}^{k} v(T_i) \\ \geq\; & v\left(S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup (C'' \setminus C') \cup C'\right) - \sum_{i=1}^{p} v(S_i), \end{aligned}$$

y, al ser

$$T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C' = T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C,$$

y, además,

$$S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C' \cup (C'' \setminus C') = S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C,$$

se tiene la desigualdad

$$v(T_1 \cup \cdots \cup T_k \cup C) - \sum_{i=1}^{k} v(T_i) \geq v(S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup C) - \sum_{i=1}^{p} v(S_i).$$

□

El valor de posición generalizado es siempre una preimputación para el juego $\left(N, v^{\mathcal{F}}\right)$ ya que es una regla de asignación y ello obliga a que sea eficiente. A continuación se dan las condiciones que obligan a que el valor de posición sea una imputación y pertenezca al core del $\mathcal{F}$-juego restringido.

Teorema 5.9 *Sea la terna $(N, v, \mathcal{F}) \in SEI^N$, donde (N, v) es un juego convexo. Entonces,*

$$\pi(N, v, \mathcal{F}) \in C\left(v^{\mathcal{F}}\right).$$

Demostración: Por el teorema anterior $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$ es convexo y, por tanto

$$\Phi\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \in C\left(v^{\mathcal{C}}\right).$$

Además

$$\Phi\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \geq 0.$$

En efecto, para cada $C \in \mathcal{C}$, se tiene que

$$\Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C} : C \notin \mathcal{S}\}} \gamma(\mathcal{S}) \left[v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \cup \{C\}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S})\right],$$

y, por la convexidad del juego de conferencias $\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right)$, se verifica la desigualdad

$$v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \cup \{C\}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \geq v^{\mathcal{C}}(\{C\}).$$

Por otro lado, como (N, v) es un juego superaditivo y cero-normalizado se tiene que $v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S} \cup \{C\}) - v^{\mathcal{C}}(\mathcal{S}) \geq 0$ ya que

$$v^{\mathcal{C}}(\{C\}) = \sum_{T \in C_{\overline{\{C\}}}(N)} v(T) = v(C) \geq 0$$

y, de aquí, $\Phi\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \geq 0$. Por tanto, $\pi(N, v, \mathcal{F}) \in \mathbb{R}^n_+$.

Se prueba ahora

$$\sum_{i \in N} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) = v^{\mathcal{F}}(N).$$

Esto es inmediato ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) &= \sum_{i \notin \bigcup\limits_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) + \sum_{i \in \bigcup\limits_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) \\
&= \sum_{i \in \bigcup\limits_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) \\
&= \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} \left[\sum_{i \in M} \pi_i(N, v, \mathcal{F})\right] \\
&= \sum_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} v(M) \\
&= v^{\mathcal{F}}(N),
\end{aligned}$$

pues el valor de posición es eficiente en las $\mathcal{F}$-componentes de N y asigna un valor nulo a todo $i \notin \bigcup\limits_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$, por ser una regla de asignación.

Por último, se ha de probar que, para toda $S \in \mathcal{F}$, $S \neq \emptyset$.

$$\sum_{i \in S} \pi_i(N, v, \mathcal{F}) \geq v^{\mathcal{F}}(S).$$

Si $S = \{i\}$ es unitaria, entonces $\pi_i(N, v, \mathcal{F}) \geq 0 = v(\{i\})$.

Si S no es unitaria, al ser factible, es un unión de soportes no unitarios. Además, la expresión como unión de soportes es única. Por ello,

$$S = \bigcup_{k \in K} S_k, \text{ con } S_k \in \mathcal{C}.$$

Entonces,

$$\sum_{i\in S}\pi_i\left(N,v,\mathcal{F}\right)=\sum_{i\in S}\left[\sum_{C\in\mathcal{C}_i}\frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\right].$$

Como $\mathcal{C}_i\supseteq\{S_k : i\in S_k\}$ y $\Phi_C\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S}\pi_i\left(N,v,\mathcal{F}\right) &= \sum_{i\in S}\left[\sum_{C\in\mathcal{C}_i}\frac{1}{|C|}\Phi_C\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\right]\\
&\geq \sum_{i\in S}\left[\sum_{\{S_k: i\in S_k\}}\frac{1}{|S_k|}\Phi_{S_k}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\right]\\
&= \sum_{k\in K}\left[\frac{1}{|S_k|}\left|S_k\right|\right]\Phi_{S_k}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\\
&= \sum_{k\in K}\Phi_{S_k}\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\geq v^{\mathcal{C}}\left(\{S_k\}_{k\in K}\right)\\
&= \sum_{M\in C_{\overline{\{S_k\}}_{k\in K}}(N)} v(M)\\
&= v(S),
\end{aligned}$$

ya que $S\in\overline{\{S_k\}}_{k\in K}$, $S=\bigcup_{k\in K}S_k$, y la última desigualdad es debida a que $\Phi_C\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\in C\left(v^{\mathcal{C}}\right)$. □

Nótese que en la demostración de ser $\Phi_C\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)\geq 0$ se ha utilizado el carácter supermodular del juego $\left(\mathcal{C},v^{\mathcal{C}}\right)$. Sin embargo, podría haberse demostrado utilizando solamente el carácter superaditivo del juego (N,v). Así, razonando de forma semejante a la efectuada en el Teorema 5.8, se tendría, para todo $C\in\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\cup\{C\}\right)-v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) &= \sum_{M\in C_{\overline{\mathcal{S}\cup\{C\}}}(N)} v(M)-\sum_{M\in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)} v(M)\\
&= v\left(M_1\cup\cdots\cup M_h\cup C\right)-v(M_1)-\cdots-v(M_h)\\
&= v\left(M_1\cup\cdots\cup M_h\cup C'\right)-v(M_1)-\cdots-v(M_h),
\end{aligned}$$

siendo, para $i = 1, \ldots, h$, $M_i \in C_{\overline{\mathcal{S}}}(N)$ con $M_i \cap C \neq \emptyset$ y donde el conjunto C' viene dado por $\{i \in C : i \notin M_1 \cup \cdots \cup M_h\}$.

Como (N, v) es superaditivo, se verifica

$$\begin{aligned} v\left(M_1 \cup \cdots \cup M_h \cup C'\right) &\geq v(M_1) + \cdots + v(M_h) + v(C') \\ &\geq v(M_1) + \cdots + v(M_h), \end{aligned}$$

ya que $v(C') \geq 0$ por ser (N, v) superaditivo y cero-normalizado. Por ello,

$$v\left(M_1 \cup \cdots \cup M_h \cup C'\right) - v(M_1) - \cdots - v(M_h) \geq 0$$

y, en consecuencia,

$$v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S} \cup \{C\}\right) - v^{\mathcal{C}}\left(\mathcal{S}\right) \geq 0 \text{ implica } \Phi_C\left(\mathcal{C}, v^{\mathcal{C}}\right) \geq 0.$$

Referencias

[1] Aumann, R. J., Maschler, M. (1964), The bargaining set for cooperative games, en *Advances in Game Theory,* M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker (eds.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443–476.

[2] Aumann, R. J., Dréze, J. H. (1974), Cooperative games with coalition structures, *International Journal of Game Theory* 3, 217–237.

[3] Aumann, R. J., Myerson, R. B. (1988), Endogenous formation of links between players and coalitions: an application of the Shapley value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 175–191.

[4] Axelrod, R. (1970), *Conflict of Interest,* Markham, Chicago.

[5] Bennett, E. (1983), The aspiration approach to predicting coalition formation and payoff distribution in side payment games, *International Journal of Game Theory* 12, 1–28.

[6] Bergantiños, G., Carreras, F., García-Jurado, I. (1993), Cooperation when some players are incompatible, *ZOR-Methods and Models of Operations Research* 38, 187–201.

[7] Bilbao, J. M., López, J. J. (1996), El Potencial de Hart y Mas-Colell para juegos restringidos por grafos, *Quaderns d'Estadística i Investigació Operativa* 20 (1), 7–22.

[8] Bilbao, J. M. (1998), Axioms for the Shapley value on convex geometries, aparecerá en *European Journal of Operations Research.*

[9] Bilbao, J. M. (1998), Values and potential of games with cooperation structure, *International Journal of Game Theory* 27, 131–145.

[10] Bilbao, J. M. (1998), Closure spaces and restricted games, aparecerá en *ZOR Mathematical Methods of Operations Research* 48 (1).

[11] Bilbao, J. M., Edelman, P. H. (1998), The Shapley value on convex geometries, enviado a *Discrete Applied Mathematics.*

[12] Bilbao, J. M., Lebrón, E., Jiménez, N. (1998), Probabilistic values on convex geometries, aparecerá en *Annals of Operations Research.*

[13] Birkhoff, G. (1948), *Lattice Theory,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[14] Bondareva, O. (1963), Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games, *Problemy Kibernetiki* 10, 119–139.

[15] Borel, É. (1921), La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau simétrique Gauche, *C. R. Acad. Sci. Paris* 173, 1304–1308.

[16] Borm, P. (1990), *On game theoretic models and solution concepts*, PhD. Dissertation, University of Nijmegen, The Netherlands.

[17] Borm, P., Owen, G., Tijs, S. H. (1992), On the position value for communication situations, *SIAM J. Disc. Math.* 5, 305–320.

[18] Borm, P., van den Nouweland, A., Owen, G., Tijs, S. H. (1993), Cost allocation and communication, *Naval Research Logistics Quarterly* 40, 733–744.

[19] Borm, P., van den Nouweland, A., Tijs, S. H. (1994), Cooperation and communication restrictions: a survey, en *Imperfections and behavior in economic organizations*, R. P., Gilles, P. H. M., Ruys (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 195–225.

[20] Calvo, E., Lasaga, J. (1997), Probabilistic graphs and power indices: an application to the spanish parliament, *Journal of Theorical Politics* 9 (4), 477–501.

[21] Carreras, F. (1991), Restriction of simple games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245–260.

[22] Davis, M., Maschler, M. (1965), The kernel of a cooperative game, *Naval Research Logistics Quarterly* 12, 223–259.

[23] Davis, M., Maschler, M. (1967), Existence of stable payoff configurations for cooperative games, en *Essays in Mathematical Economics in honor of Oskar Morgenstern*, M. Shubik (ed.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 39–52.

[24] Driessen, T. S. H. (1988), *Cooperative games, solutions and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[25] Duchet, P. (1995), Hypergraphs, en *Handbook of Combinatorics*, Graham, Grötschel, Lovász (eds.), Elsevier Science B. V., Amsterdam, 381–432.

[26] Edelman, P. H., Jamison, R. E. (1985), The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* 19, 247–270.

[27] Edelman, P. H. (1997), A note on voting, *Mathematical Social Sciences* 34, 37–50.

[28] Faigle, U. (1989), Cores of games with restricted cooperation, *ZOR-Methods and Models of Operations Research* 33, 402–405.

[29] FAIGLE, U., KERN, W. (1990), The position value of general communication games, *Mimeo*, Department of Applied Mathematics, University of Twente, The Netherlands.

[30] FAIGLE, U., KERN, W. (1992), The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, *International Journal of Game Theory* 21, 249–266.

[31] GILLIES, D. B. (1953), *Some theorems on n-person games*, PhD. Dissertation, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[32] GRAFE, F., MAULEON, A., IÑARRA, E. (1995), A simple procedure to compute the nucleolus of Γ-component additive games, *TOP* 3 (2), 235–245.

[33] GRÖTSCHEL, M., LOVÁSZ, L., SCHRIJVER, A. (1988), *Geometric algorithms and combinatorial optimization,* Springer-Verlag, Berlin.

[34] HARARY, F. (1969), *Graph theory,* Addison-Wesley, Massachusetts.

[35] HARSANYI, J. C. (1959), A bargaining model for the cooperative n-person game, *Annals of Math. Studies* 40, 325–356.

[36] HARSANYI, J. C. (1963), A simplified bargaining model for the n-person cooperative game, *International Economic Review* 4, 194–220.

[37] HARSANYI, J. C., SELTEN, R. (1988), *A general theory of equilibrium selection in games,* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[38] HART, S., KURZ, M. (1983), Endogenous formation of coalitions, *Econometrica* 51, 1047–1064.

[39] HART, S., KURZ, M. (1984), Stable coalition structures, en *Coalitions and collective action,* M. Holler (ed.), Physica-Verlag, Wuerzburg, 235–258.

[40] Hart, S., Mas-Colell, A. (1988), The potential of the Shapley value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 127–137.

[41] Kaneko, M., Wooders, M. H. (1982), Cores of partitioning games, *Math. Social Sciences* 3, 313–327.

[42] Kuipers, J. (1994), *Combinatorial methods in cooperative game theory*, PhD. Dissertation, University of Maastricht, The Netherlands.

[43] Kurz, M. (1988), Coalitional value, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 155–173.

[44] Levy, A., McLean, R. (1989), Weighted coalition structure values, *Games and Economic Behavior* 1, 234–249.

[45] Le Breton, M., Owen, G., Weber, S. (1992), Strongly balanced cooperative games, *International journal of game theory* 20 (4), 419–427.

[46] López, J. J. (1996), *Cooperación parcial en juegos de n-personas*, Tesis doctoral , Universidad de Sevilla, España.

[47] Lucas, W. F. (1968), A game with no solution, *Bull. Amer. Math. Soc.* 74, 237–239.

[48] Lucas, W. F. (1969), The proof that a game may not have a solution, *Trans. Amer. Math. Soc.* 137, 219–229.

[49] Maschler, M., Peleg, B., Shapley, L. S. (1972), The kernel and bargaining set for convex games, *International Journal of Game Theory* 1, 73–93.

[50] Maurer, S. B., Ralston, A. (1991), *Discrete algorithmic mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[51] McLean, R. (1991), Random order coalition structure values, *International Journal of Game Theory* 20, 109–127.

[52] Meessen, R. (1988), *Communication games*, Master's Thesis (in Dutch), Dept. of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands.

[53] Myerson, R. B. (1977), Graphs and cooperation in games, *Math. Oper. Res.* 2, 225–229.

[54] Myerson, R. B. (1980), Conference structures and fair allocation rules, *International Journal of Game Theory* 9, 169–182.

[55] Neumann, J. von (1928), Zur theorie der gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen* 100, 295–320.

[56] Neumann, J. von, Morgenstern, O. (1944), *Theory of games and economic behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[57] Nouweland, A. van den, Borm, P. (1991), On the convexity of communication games, *International Journal of Game Theory* 19, 421–430.

[58] Nouweland, A. van den, Borm, P., Tijs, S. H. (1992), Allocation rules for hypergraph communication situations, *International Journal of Game Theory* 20, 255–268.

[59] Nouweland, A. van den (1993), *Games and graphs in economics situations*, PhD. Dissertation, Tilburg University, The Netherlands.

[60] Owen, G. (1977), Values of games with a priori unions, en *Essays in Mathematical Economics and Game Theory,* R. Henn, O. Moeschlin (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 76–88.

[61] Owen, G. (1986), Values of graph-restricted games, *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 7, 210–220.

[62] OWEN, G. (1988), Multilinear extension of games, en *The Shapley Value,* A. Roth (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 139–151.

[63] POTTERS, J., REIJNIERSE, H. (1995), Γ-Component additive games, *International Journal of Game Theory* 24, 49–56.

[64] ROSENTHAL, E. C. (1988), Communication networks and their role in cooperative games, *Social Networks* 10, 255–263.

[65] ROSENTHAL, E. C. (1988), Communication and its costs in graph-restricted games, *Theory and Decision* 25, 275–286.

[66] ROTH, A. E. (1988), *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge, Cambridge University Press.

[67] SCHMEIDLER, D. (1969), The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1163–1170.

[68] SCHRIJVER, A. (1986), *Theory of linear and integer programming*, John Wiley & Sons, New York.

[69] SHAPLEY, L. S. (1953), A value for n-person games, *Annals of Math. Studies* 28, 307–317.

[70] SHAPLEY, L. S. (1967), On balanced sets and cores, *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453–460.

[71] SHAPLEY, L. S. (1971), Cores of convex games, *International Journal of Game Theory* 1, 11–26.

[72] SHENOY, P. (1979), On coalition formation: a game theoretic approach, *International Journal of Game Theory* 8, 133–164.

[73] SOBOLEV, A. I. (1975), The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations, (in Russian), *Mathematical Methods in the Social Sciences* 6, 94–151.

[74] STANLEY, R. P. (1986), *Enumerative combinatorics*, Vol I, Wadsworth.

[75] SWAMY, M. N. S., THULASIRAMAN, K. (1992), *Graphs: Theory and Algorithms*, Wiley-Interscience, New York.

[76] TIJS, S. H. (1981), Bounds for the core and the τ-value, en *Game Theory and Mathematical Economics,* O. Moeschlin, D. Pallaschke (eds.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 123–132.

[77] VOSHTINA, O. (1997), *Solution concepts for some generalized cooperative games*, PhD. Dissertation, University of Texas at Arlington, U.S.A.

[78] WILD, M. (1994), A theory of finite closure spaces based on implications, *Advances in Mathematics* 108, 118–139.

[79] WINTER, E. (1989), A value for cooperative games with levels structure of cooperation, *International Journal of Game Theory* 18, 227–240.

[80] WINTER, E. (1991), On non-transferable utility games with coalition structure, *International Journal of Game Theory* 20, 53–63.

[81] WINTER, E. (1992), The consistency and potencial for games with coalition structure, *Games and Economic Behavior* 4, 132–144.