

DESARROLLO Y EXPERIMENTACIÓN DE UN VEHÍCULO BASADO EN PÉNDULO INVERTIDO (PPCAR)

A. Viguria * A. Prieto * M. Fiacchini * R. Cano *
F. R. Rubio * J. Aracil * C. Canudas-de-Wit **

* Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad
de Sevilla, España

** Laboratoire d'Automatique de Grenoble (CNRS-LAG),
Francia

Resumen: En este artículo se describe el desarrollo de un vehículo basado en la estabilización de un péndulo invertido. El prototipo ha sido diseñado y realizado en la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla, utilizando componentes comerciales y de bajo coste. Para el control del vehículo se han implementado dos leyes de control (lineal y no lineal), habiéndose probado con éxito en diferentes experimentos. ***
Copyright © 2006 CEA-IFAC

*** Este trabajo (Viguria *et al.*, 2005b) ha sido galardonado en las XXVI Jornadas de Automática con el premio en "Innovación y desarrollo en los sistemas de automatización".

Palabras clave: péndulo invertido, control no lineal, tiempo real, sistemas subactuados, vehículo de transporte.

1. INTRODUCCIÓN

El control de un péndulo invertido constituye un problema clásico dentro del campo del control no lineal. Existen diferentes variantes del problema, entre las que destacan: péndulo de Furuta (Furuta, 2003), (Aström and Furuta, 1996), péndulo sobre un carro móvil (Gordillo *et al.*, 2004) y más recientemente péndulo sobre un vehículo de dos ruedas con motores independientes (Baloh and Parent, 2003), (Grasser *et al.*, 2002), (Salerno and Angeles, 2003), (Pathak *et al.*, 2004), (Tirmant *et al.*, 2002) y (Segway, 2004). A su vez, existe una amplia gama de controladores (lineales, no lineales, óptimos, robustos, predictivos, etc.) que han sido diseñados para estas aplicaciones en las últimas décadas. Debido al carácter práctico de este trabajo y al reducido coste de los componentes utilizados, se han selec-

cionado aquellos cuya ley de control requiere poca potencia de cálculo.



Figura 1. Vista general del vehículo (PPCar)

Este artículo se centra en el problema del péndulo invertido sobre un vehículo de dos ruedas para el transporte de personas (figura 1), donde realmente el péndulo está constituido por la persona que está sobre el vehículo. El movimiento de avance está provocado por la inclinación de la persona con respecto a la posición de equilibrio. De hecho los controladores expuestos en la sección 4 están diseñados sólo teniendo en cuenta el movimiento en línea recta de éste, mientras que el movimiento de rotación se controla mediante una consigna impuesta por la persona a través de un dispositivo eléctrico.

El núcleo del sistema está compuesto por un microcontrolador que es el encargado, a partir de la información proveniente de los distintos sensores, de calcular las acciones de control. Este microcontrolador se comunica con un PC permitiendo el ajuste de los controladores en línea y la captura de datos relevantes del vehículo para su posterior estudio. Estas características permiten el estudio de diversas técnicas de control mediante la realización de sencillos experimentos.

El artículo está organizado de la siguiente manera. La sección 2 describe los distintos componentes que forman el sistema y las relaciones entre ellos tanto a nivel hardware como software. La sección 3 muestra el modelo de la plataforma que será utilizado en la sección 4 en la fase de diseño de controladores. En la sección 5 se presentan los resultados obtenidos tanto en simulación como en los experimentos realizados. La última sección esta dedicada a las conclusiones y a los posibles desarrollos futuros.

2. ARQUITECTURA DEL SISTEMA

A continuación se ilustra la arquitectura del sistema desde el punto de vista hardware y software.

2.1 Arquitectura hardware

El núcleo del sistema es un microcontrolador de 8 bits y bajo coste (Atmega128 de la marca Atmel) que se comunica con los distintos periféricos. Este microcontrolador es bastante completo, incorporando: temporizadores, dos UARTS, hasta seis posibles señales PWM, varias entradas al convertidor analógico digital, 128 kilobytes de memoria de programa, etc. Aunque en principio, un microcontrolador de 8 bits no se considere conveniente para un control en tiempo real y con un tiempo de muestreo del orden de varios milisegundos como es el caso del vehículo a controlar, se ha demostrado que sí lo es. Esto es posible gracias al reloj a 16MHz que lleva incorporado, consiguiéndose unas 16 MIPS.

Como se puede observar en la figura 2, existen dos grandes grupos de dispositivos conectados al microcontrolador (Viguria *et al.*, 2005a): sensores y actuadores. El grupo de los sensores está formado, en primer lugar, por un encoder por cada rueda, que en el vehículo se han utilizado para medir la velocidad de rotación de éstas. El segundo elemento del grupo de los sensores es un inclinómetro de la marca MicroStrain que incorpora un preprocesamiento de la señal basado en un filtro de Kalman. Aunque la señal procesada presente unas buenas características ha sido necesario aplicar un filtro pasa bajo para atenuar el ruido, como se muestra en la sección 5. El último de los sensores se utiliza para indicar al control la referencia en la dirección que se desee tome el vehículo. Esta referencia se indica a partir de un puño con una interfaz eléctrica. Con respecto a los actuadores, el sistema consta de dos motores eléctricos alimentados a 24V y capaces de llegar a las 240 rpm. La potencia eléctrica que necesitan estos motores es suministrada por una controladora de los motores de la marca RoboteQ y que se comunica con el microcontrolador a partir del estándar RS-232 y un protocolo de comunicaciones.

En lo referente a los equipos auxiliares, cabe destacar el enlace inalámbrico basado en tecnología Bluetooth. Este enlace permite utilizar una conexión serie inalámbrica pero transparente a ambos extremos y que se utiliza para comunicar el microcontrolador con el PC de supervisión. La caja de control, por otra parte, permite: apagar y encender el sistema, conocer fácilmente el estado del microcontrolador a partir de un led e incorpora un mecanismo de seguridad que consiste en un interruptor que mientras el controlador esté activo debe estar pulsado, en caso contrario el control dejará de funcionar y el vehículo se parará.

2.2 Software del microcontrolador

El software para el microcontrolador se ha basado en el sistema operativo para sistemas embebidos TinyOS (Hill *et al.*, 2000), desarrollado en la Universidad de Berkeley. Este sistema operativo está dirigido por eventos, es decir, que el software responde ante eventos que son propagados desde el nivel hardware hasta los niveles superiores, siendo estos cada vez más abstractos.

TinyOS, es un software de fuentes abiertas y que ofrece varias ventajas como una estructura de módulos jerárquica que permite al programador de aplicaciones abstraerse de las singularidades del hardware con el que está trabajando. Además esta estructura de módulos permite una reutilización sencilla del código, que incluso permite el desarrollo de ciertas aplicaciones casi sin la creación de nuevo código.

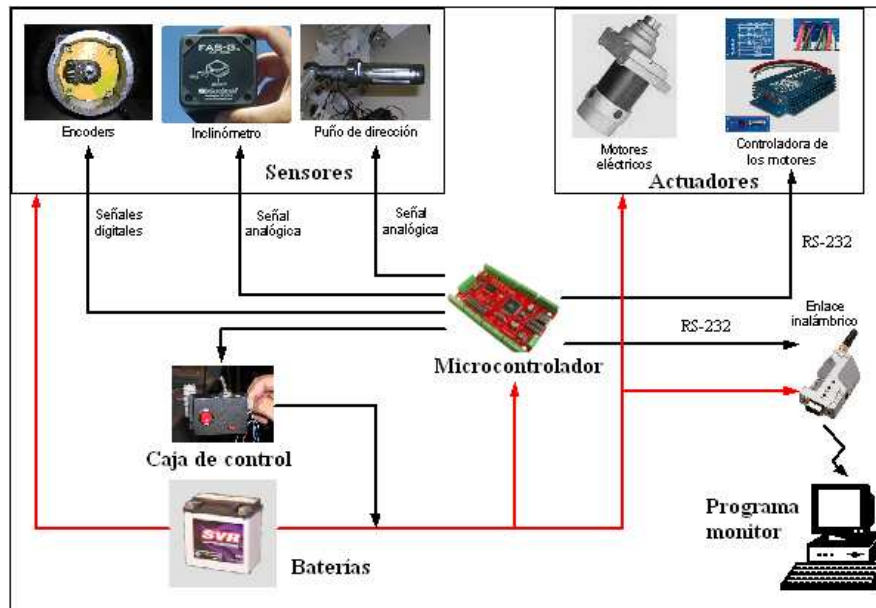


Figura 2. Arquitectura del sistema

En este sistema operativo se utiliza un nuevo lenguaje de programación llamado NesC, que permite el desarrollo de programas compactos que necesitan poco espacio de memoria lo cual es muy importante en los sistemas embebidos. En estos sistemas el diseño debe estar basado en un núcleo multihilo que sea extremadamente simple y eficiente. Este núcleo tiene dos tipos estructuras:

- **Eventos:** pueden interrumpir a las tareas, se ejecutan cuando se produce un evento hardware y deben realizar pocos cálculos.
- **Tareas:** no son temporalmente críticas, suelen utilizar un mayor tiempo de cálculo que los eventos, además las tareas no se interrumpen entre ellas por lo que la siguiente tarea sólo se ejecuta cuando termina la anterior (esto simplifica el núcleo del sistema al sólo necesitar una única pila).

En principio, este sistema operativo está pensado para ser utilizado en los nodos de las redes de sensores inalámbricas. Sin embargo ha sido modificado para que pueda ser utilizado en un sistema de control en tiempo real. Para ello, se ha creado un reloj de tiempo real de $10ms$ que dotará al sistema de una base de tiempo y será el encargado de activar el ciclo de control. Mientras que tanto para las comunicaciones por el puerto serie como para la lectura de los datos de los distintos sensores, se han utilizado interrupciones.

Por último, conviene destacar que en el desarrollo del software se ha seguido la estructura basada en módulos anteriormente mencionada con la intención de que el programa sea fácilmente escalable y abstraer a nuevos desarrolladores del nivel hardware. Los módulos básicos que se han desarrollado son: convertidor analógico digital, puerto

serie, encoder y temporizador. Cada uno de estos módulos ofrece en su nivel más alto una interfaz que permite la utilización de éstos sin tener que conocer los niveles inferiores.

2.3 Sistema de monitorización

Para la realización de experimentos útiles, es necesario tener un medio fiable para monitorizar y almacenar los datos generados por los mismos, motivando el desarrollo de una aplicación software de PC (figura 3) cuyos objetivos son: monitorización en tiempo real de las variables del sistema, capacidad de guardar las muestras obtenidas durante el experimento para su posterior estudio, control de los distintos estados del controlador (parada, activo, parada de emergencia) y posibilidad de cambiar de forma sencilla los parámetros de control sin la necesidad de volver a programar el microcontrolador.

Para llevar a cabo estos objetivos ha sido necesario utilizar un enlace inalámbrico y además el diseño de un protocolo de comunicaciones que permita, tanto al PC como al microcontrolador, interpretar todos los datos correctamente. Este protocolo de comunicaciones está formado por una serie de PDUs, donde el PC controla las comunicaciones y el microcontrolador sólo responde a las peticiones de éste. Por ejemplo, si el PC quiere cargar los parámetros del controlador, entonces transmitiría la PDU asociada a esa tarea y que está formada por: una cabecera indicando el tipo de PDU, un identificador del controlador al que se quieren cargar los nuevos valores y por último los distintos valores de los parámetros. Una vez recibida toda la información correctamente el microcontrolador realiza un acuse de recibo mandando únicamente

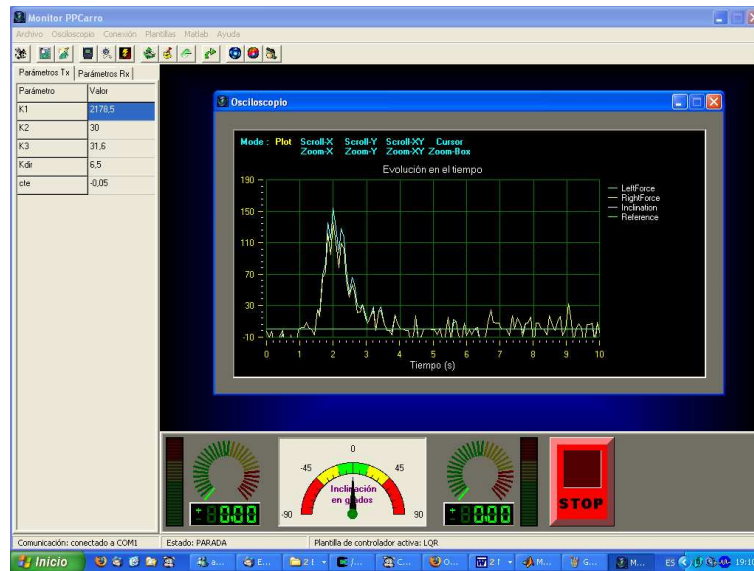


Figura 3. Aplicación de PC para monitorizar el sistema

de vuelta la cabecera que indica el tipo de PDU recibida.

Para facilitar la carga de los distintos controladores y permitir de forma sencilla el cambio de los parámetros de éstos, desde el PC y sin tener que reprogramar el microcontrolador, se han desarrollado una serie de plantillas gráficas basadas en XML.

3. MODELO DEL SISTEMA

El sistema, de forma simplificada, está constituido por una plataforma montada sobre dos ruedas que son accionadas por dos motores independientemente. Sobre esta plataforma se sitúa una masa que puede ser modelada como una masa puntual a una distancia l del plano de la base. La figura 4 muestra de forma esquemática la estructura del vehículo, los ejes de referencias, los grados de libertad y las entradas del sistema.

Desde el punto de vista del control, el sistema puede descomponerse en dos subsistemas que prácticamente están desacoplados entre sí. Una parte está formada por un robot móvil con tracción diferencial, la otra la constituye un péndulo invertido sobre un carro móvil.

3.1 Vehículo con tracción diferencial

La variable de salida en este sistema es la velocidad de giro respecto al eje vertical. La referencia para ella viene dada por una señal procedente del puño de dirección del vehículo.

Considerando las fuerzas ejercidas por cada una de las ruedas, F_i y F_d , puede obtenerse la ecuación del vehículo

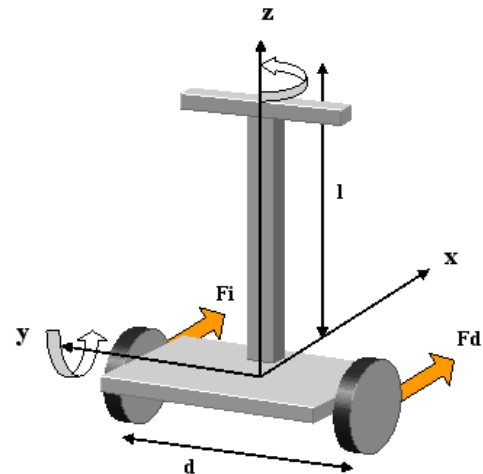


Figura 4. Esquema de la estructura del vehículo

$$J \ddot{\delta} = (F_d - F_i) d, \quad (1)$$

donde:

- F_i y F_d : fuerza ejercida por la rueda izquierda y derecha respectivamente,
- J : momento de inercia respecto al eje vertical,
- $\ddot{\delta}$: aceleración angular alrededor del eje z ,
- d : distancia entre las ruedas.

3.2 Péndulo invertido sobre base móvil

En la figura 5 se ha representado el subsistema constituido por el péndulo invertido sobre plataforma móvil.

El equilibrio de fuerzas en el eje x permite obtener la ecuación

$$(M + m)\ddot{x} + Ml\ddot{\theta} \cos \theta - Ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F. \quad (2)$$

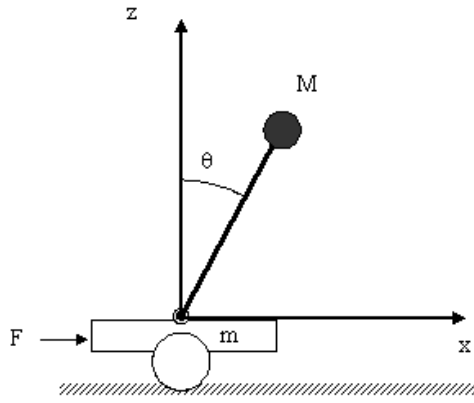


Figura 5. Péndulo invertido sobre carro móvil

Por otra parte el balance de momentos en torno al punto de giro del péndulo conduce a

$$\ddot{x}Ml \cos \theta + Ml^2\ddot{\theta} - Mgl \sin \theta = 0, \quad (3)$$

donde:

- m : masa del carro,
- M : masa del péndulo,
- l : altura del centro de masa,
- g : aceleración de la gravedad.

Ya que el objetivo del control es la estabilización del ángulo en cero y de la velocidad lineal $\dot{x} = v$, las variables de estado de interés del sistema son solamente el ángulo θ , la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la velocidad lineal v .

4. DISEÑO DE CONTROLADORES

En esta sección, se describen los dos métodos de control empleados para este sistema. El primero es un LQR (Linear Quadratic Regulator), un control lineal para el que es necesario un modelo del sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio. El otro es un control no lineal que se diseña a partir de las ecuaciones diferenciales no lineales obtenidas anteriormente.

4.1 Controlador LQR

El controlador LQR es un control por realimentación del vector de estados de la forma

$$u = -Kx, \quad (4)$$

tal que el valor de K se obtiene a partir de un problema de minimización del funcional de coste

$$J = \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt. \quad (5)$$

Las matrices Q y R penalizan respectivamente el error del estado y el esfuerzo de control.

El sistema puede ser linealizado en torno al punto de equilibrio $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $v = 0$. En este punto pueden realizarse las aproximaciones $\cos \theta \approx 1$ y $\sin \theta \approx 0$. Con ello las ecuaciones de estado en forma matricial quedan de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{ml} & 0 \\ 0 & -\frac{Mg}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F. \quad (6)$$

Utilizando este modelo la solución del problema LQR conduce a un controlador de la forma

$$F = -K_1\theta - K_2\dot{\theta} - K_3v, \quad (7)$$

donde los parámetros K_1 , K_2 y K_3 vienen determinados por los valores de los elementos de las matrices Q y R de la expresión (5).

4.2 Controlador no lineal

El diseño del controlador no lineal se ha realizado en varias fases. En primer lugar se ha obtenido una linealización parcial de las ecuaciones del sistema. Posteriormente se ha procedido a la estabilización del péndulo mediante el moldeo de la función de energía, para finalmente estabilizar la velocidad lineal del vehículo mediante el controlador propuesto por Astolfi-Kaliora (Kaliora and Astolfi, 2004). En las subsecciones siguientes se detallan cada una de estas fases.

4.2.1. Linealización parcial. Para el diseño de controladores no lineales suele resultar conveniente realizar, en primer lugar, una linealización parcial de las ecuaciones del sistema a través de la técnica de linealización por realimentación (*feedback linearization*). Esto no significa linealizar las ecuaciones sustituyendo los términos no lineales con los primeros términos de sus desarrollos de Taylor, como se suele hacer habitualmente. Esta técnica consiste en definir un bucle de control interno que genere una entrada ficticia tal que la función de transferencia entre esta entrada y la salida sea lineal. Cuando no es posible encontrar una entrada ficticia que elimine todas las no linealidades, se procede a una linealización parcial. Es lo que sucede con el péndulo invertido. Claramente, la ley que define la entrada ficticia en función de la real y de las variables de estado es, en general, no lineal.

Se consideran las ecuaciones del sistema no lineales definidas por (2) y (3). Si se despeja $l\ddot{\theta}$ de (3) y se sustituye en (2) se obtiene la ecuación

$$\ddot{x} = \frac{F + Ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - Mg \sin \theta \cos \theta}{(M + m) - M \cos^2 \theta} \quad (8)$$

cuyo segundo miembro proporciona la ley no lineal de la entrada ficticia. De hecho, si se define como nueva variable de control

$$u = \frac{F + Ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - Mg \sin \theta \cos \theta}{(M + m) - M \cos^2 \theta}, \quad (9)$$

las ecuaciones (2) y (3) del modelo pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} u \cos \theta + l\ddot{\theta} - g \sin \theta &= 0, \\ \ddot{x} &= u \end{aligned} \quad (10)$$

por lo que las ecuaciones de estado del sistema quedan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - u \cos x_1}{l}, \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (11)$$

donde $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \dot{x}$. Se puede destacar como la dinámica entre la entrada ficticia u y el estado x_3 es ahora lineal. Además, el sistema presenta ahora una estructura en cascada que permite obtener una solución escalonada al problema de control.

4.2.2. Moldeo de la función de energía. Existen diversas formas de estabilizar el péndulo. Una de ellas consiste en modificar la función de la energía del sistema mediante una ley de control adecuada, de manera que el mínimo de la misma se encuentre en el punto que se desea estabilizar.

Para obtener esta ley de control basta con igualar la ecuación del péndulo no invertido, es decir estable para $\theta = 0$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g \sin \theta}{l} \quad (12)$$

con la del nuestro sistema:

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta - u \cos \theta}{l} \quad (13)$$

es decir,

$$-\frac{g \sin \theta}{l} = \frac{g \sin \theta - u \cos \theta}{l} \quad (14)$$

obteniéndose

$$u = 2g \tan x_1. \quad (15)$$

En la práctica, esto permite obtener el valor de la entrada u tal que el sistema en bucle cerrado se comporte como si la gravedad se hubiera cambiado

de signo, es decir, como si tuviera la función de energía:

$$V_a = -\cos x_1 \quad (16)$$

Utilizando esta ley de control el sistema presentaría oscilaciones alrededor del punto de equilibrio. Si se desea un comportamiento asintóticamente estable es necesario añadir un término de amortiguamiento:

$$u = 2K_m g \tan x_1 + \frac{K_a}{M} x_2, \quad (17)$$

donde K_m es una constante que añade un mayor grado de libertad al ajuste del controlador.

4.2.3. Estabilización de la velocidad. Para terminar el diseño del controlador se emplean técnicas llamadas de *forwarding* para estabilizar la velocidad del vehículo.

Estas técnicas se aplican al problema de la estabilización de sistemas que tengan una estructura en cascada, es decir, compuestos por dos subsistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2, U) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_2, U) \end{aligned} \quad (18)$$

La técnicas de forwarding proponen estabilizar en un primer paso el subsistema superior a través de una señal de control U , para luego modificarla de manera que se controle el segundo subsistema sin que el equilibrio de X_1 pierda su carácter estable.

Como el sistema tras la linealización parcial en (11) tiene estructura en cascada y el primer subsistema, formado por x_1 y x_2 , ha sido estabilizado a través del moldeo de energía, se pueden aplicar dichas técnicas para la estabilización de la velocidad.

Este objetivo se consigue añadiendo un nuevo término a la ley de control de la forma

$$u = 2K_m g \tan x_1 + \frac{K_a}{M} x_2 + u_d. \quad (19)$$

El valor de u_d puede obtenerse de diversas maneras. En (Gordillo *et al.*, 2004) se imponen condiciones sobre la función de energía del sistema en bucle cerrado. Esto lleva a la necesidad de resolver ecuaciones en derivadas parciales que proporcionan una ley de control bastante compleja. En este trabajo, debido a su simplicidad de cálculo, se ha utilizado la ley de control propuesta por Astolfi-Kaliora (Kaliora and Astolfi, 2004) donde

$$u_d = \epsilon \operatorname{sat} \left(\frac{K_v x_3}{\epsilon} \right). \quad (20)$$

Los detalles de esta ley pueden ser encontrados en el artículo referenciado anteriormente. De todas formas se va a detallar brevemente a continuación.

Debido a la presencia de la saturación y a oportunos valores de los parámetros K_v y ϵ , el término u_d es despreciable respecto a los términos relativos al ángulo y a la velocidad angular en (19), cuando estos se hallan lejos del origen. Por lo tanto, cuando el sistema está lejos de la posición deseada la acción de control se ocupa casi exclusivamente de llevar el péndulo a la posición vertical. Una vez que el péndulo se encuentra cerca del equilibrio, en (19) los dos primeros términos del segundo miembro prácticamente se anulan y sólo actúa u_d , que funciona como una pequeña perturbación de la entrada. Esto conlleva que el ángulo nulo no sea un equilibrio mientras que la velocidad no sea nula. De manera que, cuando el péndulo se encuentra cerca del origen y la señal u_d está saturada, el ángulo se estabiliza en un valor cercano al cero y la velocidad lineal decrece lentamente. Finalmente, en cuanto la velocidad entra en la zona lineal de la saturación, los tres estados son estabilizados en el origen.

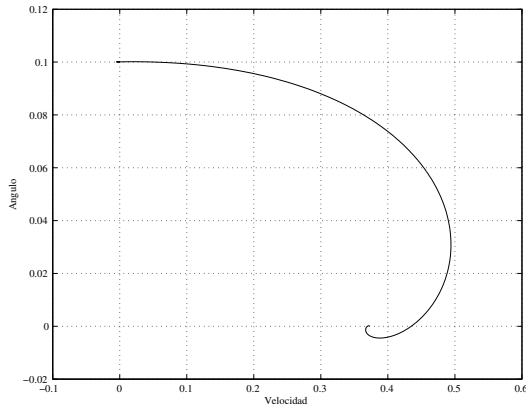


Figura 6. Evolución de velocidad y ángulo sin u_d .

En la figura 6, se puede ver la evolución de la velocidad respecto al ángulo sin el control de velocidad. En este caso el sistema se estabiliza en un punto con ángulo cero y velocidad no nula. Comparándola con la figura 7 se puede notar el efecto de la señal u_d . El primer tramo de la trayectoria es prácticamente igual al anterior, pero una vez que se llega cerca del ángulo cero la velocidad empieza a deslizarse lentamente hacia el origen. En la figura 8 se muestra una ampliación de la trayectoria final de la figura 7. Se puede observar como el ángulo se mantiene constante cuando la velocidad está en la zona de saturación y como evoluciona hacia el origen cuando entra en la zona lineal.

Finalmente tras deshacer la linealización parcial, la ley de control global que indica la fuerza a aplicar al vehículo para conseguir la estabilización del péndulo y la velocidad de éste, resulta ser

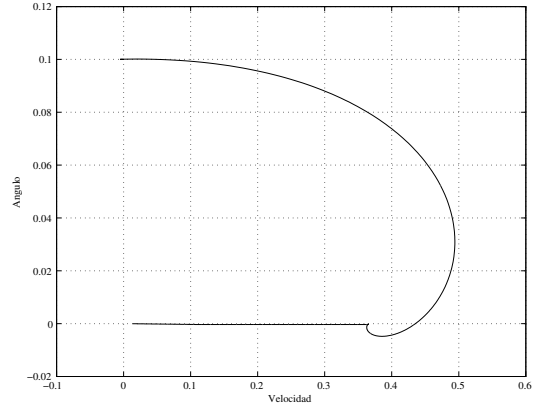


Figura 7. Evolución de velocidad y ángulo con u_d .

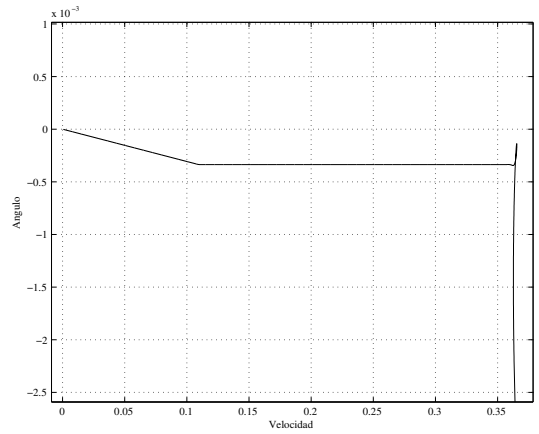


Figura 8. Evolución de velocidad y ángulo con u_d en la zona lineal.

$$F = [(M + m) - M \cos^2 \theta] u + Mg \sin \theta \cos \theta - M l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (21)$$

con

$$u = 2K_m g \tan \theta + \frac{K_a}{M} \dot{\theta} + \epsilon \text{sat} \left(\frac{K_v v}{\epsilon} \right). \quad (22)$$

4.2.4. Sintonización del controlador no lineal
El controlador LQR presenta un comportamiento óptimo entorno al punto de equilibrio. Así que, si se determina la relación entre las constantes de este controlador y las del Astolfi-Kaliora, podrán obtenerse unos valores de K_m , K_a y K_v que proporcionen un comportamiento similar a LQR al menos en el punto de equilibrio.

Deshaciendo la linealización parcial que se realizó como paso previo al diseño del control no lineal se llega a la ecuación (21) donde u está definida por la expresión (22).

Si se linealizan estas ecuaciones en el punto de equilibrio $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ y $v = 0$, se obtiene que

$$F = [Mg + 2gmK_m] \theta + mK_a \dot{\theta} + mK_v v. \quad (23)$$

Si se compara esta ecuación con la del LQR, ecuación (7), pueden obtenerse los valores de K_m , K_a y K_v que proporcionarán buenas características al controlador, esto es

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{-K_1 - Mg}{2gm} \\ K_a &= \frac{-K_2}{m} \\ K_v &= \frac{-K_3}{m} \end{aligned} \quad (24)$$

5. RESULTADOS OBTENIDOS

Concluido el diseño de controladores se ha realizado un conjunto de simulaciones con la herramienta Simulink de Matlab. Esto ha permitido comprobar su funcionamiento así como proceder a la sintonización de los distintos parámetros de dichos controladores. La señal procedente del controlador, que se corresponde a la fuerza a aplicar al carro, es repartida de forma simétrica entre las dos ruedas del vehículo.

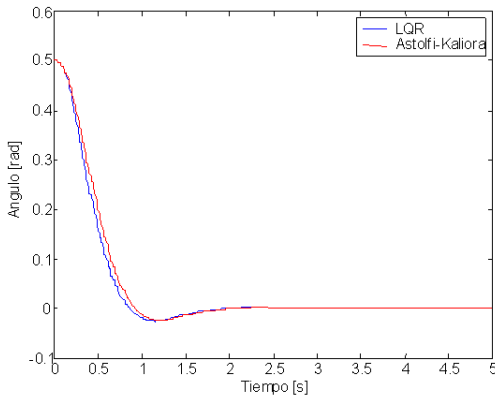


Figura 9. Comparación de controladores

Por otra parte, para el guiado del vehículo se ha utilizado un control proporcional que aumenta la fuerza ejercida por una de las ruedas y la disminuye en la otra, lo que provoca el giro deseado.

Los valores de los parámetros del sistema son:

- $m = 35 \text{ kg}$: masa del carro,
- $M = 70 \text{ kg}$: masa del péndulo,
- $l = 1 \text{ m}$: altura del centro de masa,
- $g = 9.8 \text{ m/s}^2$: aceleración de la gravedad,
- $J = 10 \text{ kg m}^2$: momento de inercia respecto al eje vertical,
- $d = 0.83 \text{ m}$: distancia entre las ruedas.

Para el cálculo de los parámetros del controlador lineal se ha resuelto la ecuación de Riccati asociada al problema LQR empleando las matrices

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 0.1, \quad (25)$$

en la ecuación (5), obteniendo los siguientes valores

$$K_1 = 2070 \quad K_2 = 385.1 \quad K_3 = 3.2. \quad (26)$$

Los valores de las matrices Q y R han sido elegidos para priorizar la estabilización del péndulo con respecto a la velocidad.

Usando las ecuaciones (24) de sintonización, los parámetros del controlador no lineal son

$$K_m = -4.017 \quad K_a = -11.004 \quad K_v = -0.090, \quad (27)$$

mientras que el valor $\epsilon = 0.01$ ha sido elegido empíricamente.

Las simulaciones realizadas con estos parámetros muestran que los dos controladores, LQR y no lineal, presentan un comportamiento muy similar en torno al punto de equilibrio. Sólo se aprecian diferencias cuando el péndulo se aleja de la posición vertical. En la figura 9 se muestra la evolución del ángulo, con ambos controladores, partiendo de una posición inicial de 0.5 rad hasta su estabilización en cero.

Al implementar estos controladores en el vehículo se ha observado una fuerte vibración debida a la presencia de un ruido en la señal del inclinómetro. El efecto de este ruido se presenta en la realimentación de la medida del ángulo θ y sobre todo en la de su derivada $\dot{\theta}$, ya que ésta se calcula en base al incremento de la señal en el intervalo de muestreo. Como el tiempo de muestreo es muy pequeño, 10 ms, las rápidas variaciones debidas al ruido conllevan valores muy elevados de la derivada.

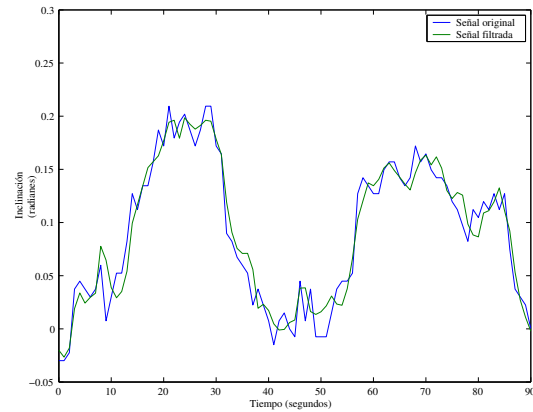


Figura 10. Comparación entre la señal θ original y filtrada

Para atenuar este fenómeno se puede actuar sobre dos aspectos; aplicando un filtro pasa bajo a la señal para eliminar las componentes de alta frecuencia debidas al ruido y disminuyendo el valor de la constante de realimentación del estado θ . Ambos efectos quedan ilustrados en las figuras 10 y 11.

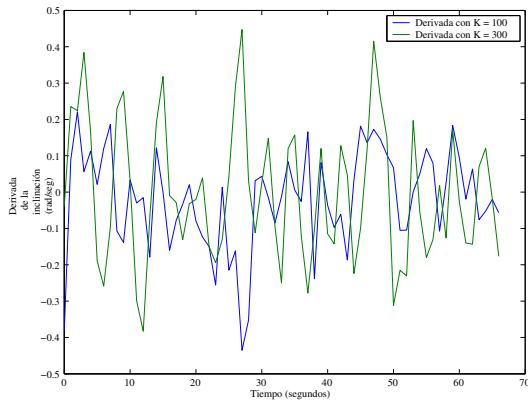


Figura 11. Incremento del ruido en $\hat{\theta}$ al aumentar la ganancia

Concretamente se ha aplicado un filtro de segundo orden Butterworth utilizando la técnica de diseño de filtros IIR (Infinite Impulse Response) mediante la transformación bilineal (Ifeachor and Jervis, 1993). La función de transferencia del filtro implementado es:

$$H(z^{-1}) = \frac{0.0133z^{-2} + 0.0266z^{-1} + 0.0133}{0.85z^{-2} - 1.9734z^{-1} + 1.1766}. \quad (28)$$

Con respecto a los experimentos, se ha observado empíricamente un buen comportamiento fijando $K_2 = 100$ para el LQR y calculando el K_a asociado para el controlador no lineal. En las figuras 12 y 13 se muestran las fuerzas asociadas a cada una de las ruedas del vehículo para cada uno de los controladores implementados. En ambas gráficas se muestra un mismo experimento donde en primer lugar el vehículo se desplaza hacia adelante, a continuación da una vuelta sobre sí mismo y finalmente se vuelve a desplazar girando a izquierda y a derecha.

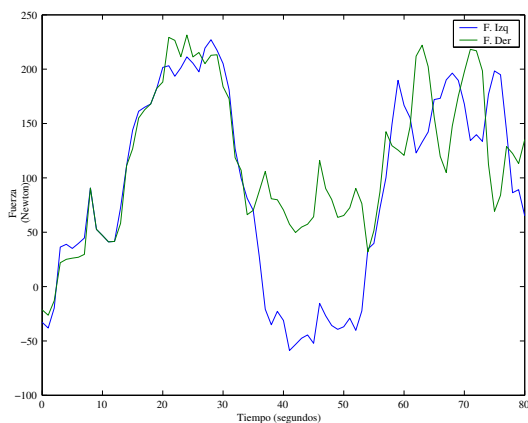


Figura 12. Resultados experimentales obtenidos con el controlador LQR

Por otra parte, en la figura 15 se muestra la evolución de la inclinación en un experimento real. En la gráfica se puede observar que la inclinación máxima es de 0.16 radianes. Esto implica que en los experimentos, el vehículo no suele inclinarse

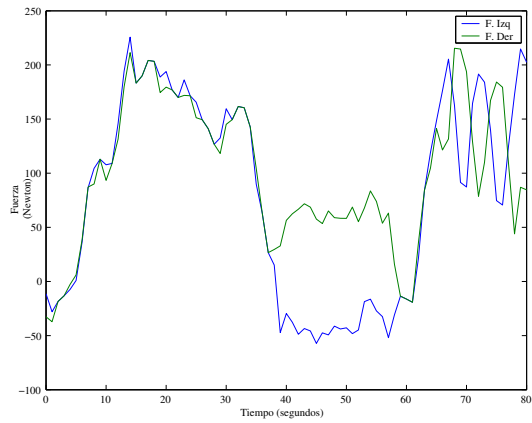


Figura 13. Resultados experimentales obtenidos con el controlador no lineal

demasiado y que por lo tanto el comportamiento de ambos controladores es muy parecido, coincidiendo con los resultados de las simulaciones. Esto unido al hecho que no es posible repetir exactamente el mismo experimento debido al efecto de la persona que lo conduce, provoca que la comparación experimental entre los dos controladores no haya proporcionado resultados que demuestren las diferencias entre ellos. Este tipo de comparaciones sólo sería posible si el sistema desarrollado fuera completamente autónomo.

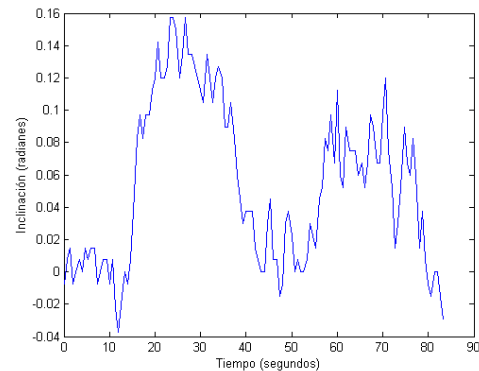


Figura 15. Evolución de la inclinación durante un experimento

Finalmente, en la figura 14 se muestra una secuencia de fotogramas de un vídeo de una de las pruebas donde se puede observar como el péndulo se estabiliza incluso cuando se realizan giros.

6. CONCLUSIONES Y DESARROLLO FUTURO

En este artículo se presenta el proyecto y el funcionamiento de un vehículo cuyo movimiento está basado en la estabilización de un péndulo invertido. Este vehículo ha sido diseñado por los autores y realizado a partir de componentes comerciales de bajo coste. Se ha conseguido un



Figura 14. Secuencia de fotogramas de un experimento

sistema de experimentación que permite de forma sencilla el estudio de diversos controladores.

En las pruebas realizadas se han utilizado dos tipos de controladores: un controlador lineal óptimo (LQR) y un controlador no lineal basado en moldeo de energía, obteniendo una conducción cómoda y suave en ambos casos.

Dentro de los desarrollos futuros se contempla el diseño de nuevas técnicas de control y un estudio comparativo entre ellas. Además, se contempla el estudio de la interacción entre el giro alrededor del eje vertical y el sistema constituido por el péndulo invertido.

Finalmente varios vídeos demostrativos están disponibles en la página web:

<http://nyquist.us.es/~ppcar> .

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al MCYT-FEDER por subvencionar este trabajo a partir de los proyectos DPI2004-06419, DPI2003-00429, HF2003-0237 y SAB2003-0085. También agradecen la subvención proporcionada por el programa PICASSO No. 07261YJ (EGIDE) del Ministerio Francés de Asuntos Exteriores y de LAFMA.

REFERENCIAS

- Aström, K. J. y K. Furuta (1996). Swinging-up a pendulum by energy control. En: *Proc. IFAC Congress*. pp. 37–95.
- Baloh, M. y M. Parent (2003). Modeling model verification intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system. En: *Conf. Comp. Intelligence, Robotics Autonomous Systems*. Singapore.
- Furuta, K. (2003). Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptative mechatronics. En: *Proceedings of the 42nd IEEE CDC*.
- Gordillo, F., F. Salas y J. Aracil (2004). A forwarding controller for the pendulum on a cart. En: *Proceedings of Control*. Vol. 6. Portugal.
- Grasser, F., A. D'Arrigo, S. Colombi y A. Rufer (2002). Joe: A mobile, inverted pendulum. *IEEE Trans. Industrial Electronics* **40(1)**, 107–114.
- Hill, J., R. Szcwcyk, A. Woo, S. Hollar, D. Culler y K. Pister (2000). System architecture directions for networked sensors. *ACM. Operating Systems Review*. **34(5)**, 93–104.
- Ifeachor, E.C. y B.W. Jervis (1993). *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. Addison-Wesley.
- Kaliora, G. y A. Astolfi (2004). Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals. *IEEE Trans. Autom. Control* **49(11)**, 1975–1990.
- Pathak, K., J. Franch y S.K. Agrawal (2004). Velocity control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization. En: *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 4. pp. 3962– 3967.
- Salerno, A. y J Angeles (2003). On the nonlinear controllability of a quasiholonomic mobile robot. En: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 3. pp. 3379– 3384.
- Segway, Inc. (2004). <http://www.segway.com>.
- Tirmant, H., M. Baloh, L. Vermeiren, T.M. Guerra y M. Parent (2002). B2, an alternative two wheeled vehicle for an automated urban transportation system. En: *IEEE Intelligent Vehicle Symposium*. Vol. 2. pp. 594– 603.
- Viguria, A., M. Fiacchini, A. Prieto, R. Cano y B.J. Vela (2005a). Vehículo basado en péndulo invertido. Memoria técnica. Universidad de Sevilla. <http://nyquist.us.es/~ppcar>.
- Viguria, A., R. Cano, M. Fiacchini, A. Prieto, B.J. Vela, F. Rodríguez, J. Aracil y C. Canudas-de Wit (2005b). Ppcar (personal pendulum car): Vehículo basado en el péndulo invertido. En: *Actas de las XXVI Jornadas de Automática*. pp. 445– 452.